Étude du problème de Stokes avec bords irréguliers

FLUIDE

June 11, 2024

1 Introduction

Le système de Stokes, nommé d'après le mathématicien et physicien britannique George Gabriel Stokes, est un ensemble fondamental d'équations en mécanique des fluides (voir [8] pour l'obtention). Ces équations décrivent le comportement des fluides dont la viscosité ne peut être négligée. Le système de Stokes est souvent utilisé dans des contextes où les effets inertiels sont faibles comparés aux effets visqueux, ce qui simplifie et linéarise les équations de Navier-Stokes complètes en négligeant le terme d'accélération convective. Dans ce contexte, nous considérons un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ de frontière Γ, sur lequel le système d'équations adimensionné est donné par :

$$\begin{cases} -\boldsymbol{\Delta}\mathbf{u} + \boldsymbol{\nabla}p = \mathbf{f} \\ \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{u} = 0. \end{cases} \tag{1}$$

où $\mathbf{u}$ représente le champ de vitesse du fluide, p la pression, et $\mathbf{f}$ un terme de force volumique appliqué au système. Les termes $-\boldsymbol{\Delta}\mathbf{u}$ et $\boldsymbol{\nabla}p$ traduisent respectivement la dissipation visqueuse et l'effet de la pression dans le fluide, tandis que la contrainte de divergence libre ($\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{u} = 0$) traduit l'incompressibilité du fluide. On se concentre dans un premier temps sur des conditions au bord qui traduisent le fait que la quantité de fluide à l'intérieur du domaine est constante. Si l'étude théorique de ce problème a déjà été réalisée dans le contexte des domaines à bord régulier [4], elle mérite d'être généralisée à des classes plus générales de domaines. En effet dans ne nombreux cas, l'approximation régulière peut ne pas apparaître raisonnable. D'autre part, on pourra notamment traiter le cas de nombreux domaines à bord fractal auxquels on a trouvé des applications intéréssantes dans d'autres domaines de la physique, comme l'acoustique (voir [6]).

1.1 Notations

- X est un ensemble ou un espace.
- $\|\cdot\|_X$ est la norme de l'espace X.
- Ω est un domaine (ouvert connexe) de $\mathbb{R}^N$.
- Γ sera toujours la frontière de Ω.
- f est une fonction définie sur Ω, à valeurs réelles.
- $f\big|_X$ est la restriction de f à X.
- $\mathbf{u}$ est une fonction définie sur Ω, à valeurs dans $\mathbb{R}^N$.
- $\mathbf{u}_k$ est la k-ième coordonnée du vecteur $\mathbf{u}$.
- $Ker(A)$ est le noyau de l'opérateur A.
- $Im(A)$ est l'image de l'opérateur A.
- $B_r(x) \subset \mathbb{R}^N$ est la boule centrée en x de rayon $r > 0$.
- $\overline{X}$ est l'adhérence de X.

- X' est le dual topologique de l'espace X.
- $\langle \cdot, \cdot \rangle_{X',X}$ est le crochet de dualité de X' sur X.
- μ est une mesure définie sur la tribu borélienne de $\mathbb{R}^N$.
- λ est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^N$.
- $L^p(X, \mu)$, pour $1 \leq p < \infty$, est l'espace des classes de fonctions égales μ-presque partout sur X dont le module à la puissance p est intégrale par rapport à μ, muni de la norme : $\|f\|_{L^p(X)} = \left(\int_X |f(x)|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}}$. Si on ne précise pas la mesure μ utilisée, c'est qu'on intègre par rapport à la mesure de Lebesgue λ.
- $L^p_{loc}(X, \mu)$, pour $1 \leq p < \infty$, est le sous espace de $L^p(X, \mu)$ formé des classes de fonctions dont le module à la puissance p est localement intégrable.
- $L^p_0(X, \mu)$, pour $1 \leq p < \infty$, est le sous espace de $L^p(X, \mu)$ formé des classes de fonctions d'intégrale nulle.
- $\fint_\Omega f d\lambda$ est la moyenne de f sur Ω.
- $\partial_k f$ est la dérivée partielle de f par rapport à sa k-ième variable.
- $\boldsymbol{\nabla}$ est le gradient. En l'absence de précisions, on le comprend au sens classique : $\boldsymbol{\nabla} f = (\partial_1 f, \dots \partial_N f)^T$.
- $\boldsymbol{\nabla}\cdot$ est l'opérateur divergence. En l'absence de précisions, on le comprend au sens classique : $\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{u} = \sum_{k=1}^N \partial_k \mathbf{u}_k$.
- Δ est l'opérateur laplacien. En l'absence de précisions, on le comprend au sens classique : $\Delta f = \sum_{k=1}^N \partial^2_{k^2} f$.
- $\boldsymbol{\Delta}$ est le laplacien vectoriel. En l'absence de précisions, on le comprend au sens classique : $\boldsymbol{\Delta}\mathbf{u} = (\Delta \mathbf{u}_1, \dots, \Delta \mathbf{u}_N)^T$.
- $J_\mathbf{u} \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ est la matrice jacobienne de $\mathbf{u}$. En l'absence de précisions on la comprend au sens classique : $J_\mathbf{u} = [\partial_j u_i]_{1 \leq i,j \leq N}$.
- $\boldsymbol{\nabla} f \cdot \boldsymbol{\nabla} g$ est le produit scalaire des vecteurs $\boldsymbol{\nabla} f$ et $\boldsymbol{\nabla} g$.
- $(\cdot \mid \cdot)$ est le produit scalaire canonique sur $\mathcal{M}_N(\mathbb{R})$.
- $\mathcal{D}(\Omega)$ est l'espace des fonctionc C^∞ à support compact sur Ω.
- $H^k(\Omega)$ est l'espace de Sobolev d'ordre k souvent noté $W^{k,2}(\Omega)$, muni de sa norme habituelle.
- $H^1_0(\Omega)$ est l'adhérence de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$.
- $H^{-1}(\Omega)$ est le dual topologique de $H^1_0(\Omega)$.
- $H^{-1}(\Omega)^N$ est le dual topologique de $H^1_0(\Omega)^N$.

1.2 Définitions

Définition 1.1 (Domaine d'extension)**.** *Le domaine Ω est un domaine d'extension de Sobolev (on dira simplement domaine d'extension) s'il existe un opérateur linéaire continu $E : H^1(\Omega) \to H^1(\mathbb{R}^N)$ tel que pour tout $u \in H^1(\Omega)$ on ait $Eu\big|_\Omega = u$.*

Les résultats classiques de Calderon-Stein [2, 10] énoncent que **tout domaine à frontière lipschitzienne est un domaine d'extension**. Cependant, plus récemment, Hajłasz, Koskela et Tuominen ont donné une caractérisation précise et générale des domaines d'extension [5] qui montre qu'un grand nombre d'entre eux ne sont pas lipschitziens. Si cette caractérisation est très complexe, on retiendra tout de même une condition nécessaire importante : **un domaine d'extension dans $\mathbb{R}^N$ est nécessairement un N-ensemble.**

Définition 1.2 (N-ensemble)**.** *Soit F un borélien de $\mathbb{R}^N$. On dit que F est un N-ensemble s'il existe deux constantes $c_1, c_2 > 0$ telles que :*

$$\forall x \in F, \forall\ 0 < r \leq 1, \quad c_1 r^N \leq \lambda(F \cap B_r(x)) \leq c_2 r^N.$$

Définition 1.3. *Soit Ω un domaine arbitraire de $\mathbb{R}^N$. L'opérateur de trace est défini [9], pour $u \in L^1_{loc}(\Omega)$, par :*

$$Tr(u)(x) = \lim_{r \to 0} \frac{1}{\lambda(\Omega \cap B_r(x))} \int_{\Omega \cap B_r(x)} u \, d\lambda.$$

L'opérateur de trace est considéré pour tous les $x \in \overline{\Omega}$ tels que la limite existe.

Définition 1.4. *Soit Ω un domaine arbitraire de $\mathbb{R}^N$. On note $B(\Gamma) = Im(Tr)$ l'image de $H^1(\Omega)$ par l'opérateur de trace.*

1.3 Quelques résultats utiles

Le théorème suivant sera fondamental pour tous les résultats présentés par la suite.

Théorème 1.1. *Soit Ω un domaine d'extension borné de $\mathbb{R}^N$. Alors :*

- *L'opérateur de trace $Tr : H^1(\Omega) \to B(\Gamma)$ est linéaire et continu.*
- *On a $Ker(Tr) = H^1_0(\Omega)$.*
- *Tr admet un inverse à droite $E_\Gamma : B(\Gamma) \to H^1(\Omega)$, qui est également linéaire continu.*

Preuve. Voir 8.4.6 de [9] et [5]. □

Par abus de notation, lorsque $\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_N)^T \in H^1(\Omega)^N$, on notera également $Tr(\mathbf{u})$ pour désigner le vecteur $(Tr(u_1), \ldots, Tr(u_N))^T \in B(\Gamma)^N$. On fera de même avec l'inverse à droite de la trace E_Γ.

Lemme 1.1. *Soit Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^\mathbb{N}$. On a la décomposition en somme directe orthogonale : $L^2(\Omega) = L^2_0(\Omega) \oplus Vect(x \mapsto 1)$.*

Preuve. Soit Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^\mathbb{N}$. On rappelle que $L^2_0(\Omega) := \{f \in L^2(\Omega) \mid \int_\Omega f d\lambda = 0\}$. $Vect(x \mapsto 1)$ est un sous espace de dimension finie (donc fermé) de l'espace de Hilbert $L^2(\Omega)$, donc on sait que son orthogonal lui est supplémentaire. Il est clair que l'orthogonal des fonctions constantes est l'ensemble des fonctions d'intégrale nulle $L^2_0(\Omega)$. □

Corollaire 1.1. *Soit Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^\mathbb{N}$. $\mathcal{D}(\Omega) \cap L^2_0(\Omega)$ est dense dans $L^2_0(\Omega)$.*

Preuve. Soit $f \in L^2_0(\Omega)$. Puisqu'on sait que $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans $L^2(\Omega)$ (théorème 1.1 de [4]), il existe (f_n) une suite de $\mathcal{D}(\Omega)$ qui converge vers f. On considère alors la suite définie par $g_n = f_n - ⨍_\Omega f_n d\lambda$; on a clairement $g_n \in \mathcal{D}(\Omega) \cap L^2_0(\Omega)$ pour tout n, et par continuité de la forme linéaire intégrale sur $L^2(\Omega)$, (g_n) converge vers $f - ⨍_\Omega f d\lambda = f$, d'où le résultat. □

1.4 Formulation des conditions au bord

1.4.1 Heuristique

Lorsque le domaine Ω considéré est par exemple à bord lipschitzien, on sait qu'on peut définir en presque tout point de sa frontière Γ un vecteur normal $\boldsymbol{\nu}$. La condition indiquant que la quantité de fluide dans le domaine est constante s'écrit alors :

$$\begin{cases} \mathbf{u}\big|_\Gamma = \mathbf{g}, \mathbf{g} \in B(\Gamma)^N \\ \int_\Gamma \mathbf{g} \cdot \boldsymbol{\nu} = 0. \end{cases}$$

Quand on considère des classes de domaines plus larges, le vecteur normal n'existe pas toujours, il faut donc trouver un autre moyen d'écrire cette condition.

1.4.2 Calcul du flux dans le cas général

Théorème 1.2. *Soit Ω un domaine d'extension borné de $\mathbb{R}^N$. Étant donné $u \in H^1(\Omega)$, telle que $\Delta u \in L^2(\Omega)$, il existe une unique forme linéaire $g \in B'(\Gamma)$ telle que :*

$$\langle g, Tr(v)\rangle_{B'(\Gamma),B(\Gamma)} = \int_\Omega \boldsymbol{\nabla} u \cdot \boldsymbol{\nabla} v \; d\lambda + \int_\Omega \Delta u \; v \; d\lambda, \quad \forall v \in H^1(\Omega). \tag{2}$$

On note $g = \frac{\partial u}{\partial \nu}$.

Preuve. Voir 2.5 de [3]. □

Théorème 1.3. *Soit Ω un domaine d'extension borné de $\mathbb{R}^N$. Étant donné $\mathbf{u} \in H^1(\Omega)^N$, telle que $\boldsymbol{\Delta}\mathbf{u} \in L^2(\Omega)^N$, il existe une unique forme linéaire $g \in (B(\Gamma)^N)'$ telle que :*

$$\langle g, Tr(\mathbf{v})\rangle_{(B(\Gamma)^N)',B(\Gamma)^N} = \int_\Omega (J_\mathbf{u} \mid J_\mathbf{v}) d\lambda + \int_\Omega \boldsymbol{\Delta}\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \; d\lambda, \quad \forall \mathbf{v} \in H^1(\Omega)^N. \tag{3}$$

Avec $(\cdot \mid \cdot)$ le produit sclaire canonique sur $\mathcal{M}_N(\mathbb{R})$. On note $\mathbf{g} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \nu}$.

Preuve. Soit $\mathbf{u} \in H^1(\Omega)^N$ qui vérifie $\boldsymbol{\Delta} u \in L^2(\Omega)^N$. En notant $u_1, \ldots, u_N$ les coordonnées de $\mathbf{u}$, on sait que chaque u_i vérifie les hypothèses du théorème 1.2 ; on peut donc poser, pour $\mathbf{v} \in H^1(\Omega)^N$:

$$\langle g, Tr(\mathbf{v})\rangle_{(B(\Gamma)^N)',B(\Gamma)^N} := \langle \frac{\partial u_1}{\partial \nu}, Tr(v_1)\rangle_{B'(\Gamma),B(\Gamma)} + \cdots + \langle \frac{\partial u_N}{\partial \nu}, Tr(v_N)\rangle_{B'(\Gamma),B(\Gamma)}.$$

Il est clair que g ainsi définie est linéaire et continue, et en utilisant l'égalité (2) du théorème 1.2, on aboutit à l'équation (3). □

Corollaire 1.2. *Soit Ω un domaine d'extension borné de $\mathbb{R}^N$. Il existe une unique forme linéaire $\Phi \in (B(\Gamma)^N)'$ telle que :*

$$\langle \Phi, Tr(\mathbf{v})\rangle_{(B(\Gamma)^N)',B(\Gamma)^N} = \int_\Omega \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{v} d\lambda, \forall \; \mathbf{v} \in H^1(\Omega)^N. \tag{4}$$

Preuve. Soit $\mathbf{u} = Id_{\mathbb{R}^N}\big|_\Omega$. On a $\mathbf{u} \in H^1(\Omega)^N$ et $\boldsymbol{\Delta}\mathbf{u} = \mathbf{0} \in L^2(\Omega)$, donc le théorème 1.3 permet d'affirmer qu'il existe une unique forme linéaire $\Phi \in (B(\Gamma)^N)'$ telle que :

$$\langle \Phi, Tr(\mathbf{v})\rangle_{(B(\Gamma)^N)',B(\Gamma)^N} = \int_\Omega (J_\mathbf{u} \mid J_\mathbf{v}) d\lambda, \forall \; \mathbf{v} \in H^1(\Omega)^N.$$

Or, $J_\mathbf{u} = I_N$, donc pour $\mathbf{v} \in H^1(\Omega)^N$, on a $(J_\mathbf{u} \mid J_\mathbf{v}) = \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{v}$, d'où l'égalité (4). □

On étudiera donc à partir de maintenant le système suivant :

$$\begin{cases} -\boldsymbol{\Delta}\mathbf{u} + \boldsymbol{\nabla} p = \mathbf{f}, \\ \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{u} = 0, \\ \mathbf{u}\big|_\Gamma = \mathbf{g}, \quad \langle \Phi, \mathbf{g} \rangle = 0. \end{cases} \tag{5}$$

Ce problème n'est pas encore défini de façon assez rigoureuse, puisqu'il reste encore à préciser en quel sens sont compris les opérateurs gradient, divergence, laplacien ainsi que l'espace dans lequel on prendra le terme de forces voumiques $\mathbf{f}$.

2 Opérateurs

Pour étudier le système (5), il est capital de bien définir les opérateurs qui y apparaissent. C'est l'objectif de toute cette section.

2.1 Opérateur divergence

Définition 2.1. *Soit Ω un domaine d'extension borné de $\mathbb{R}^N$. On définit l'opérateur divergence $\boldsymbol{\nabla}\cdot : H^1(\Omega)^N \to L^2(\Omega)$ par $\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{u} = \sum_{i=1}^N \partial_i u_i$.*

Lemme 2.1. *Soit Ω un domaine d'extension borné de $\mathbb{R}^N$. L'opérateur divergence $\boldsymbol{\nabla}\cdot : H^1(\Omega)^N \to L^2(\Omega)$ est continu.*

Preuve. On rappelle que l'espace $H^1(\Omega)^N$ est muni de la norme suivante :

$$\|\mathbf{u}\|_{H^1(\Omega)^N} = \sqrt{\sum_{i=1}^N \|u_i\|^2_{H^1(\Omega)}}.$$

Soit $\mathbf{u} \in H^1(\Omega)^N$. Par l'inégalité triangulaire on a $\|\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)} \leq \sum_{i=1}^N \|\partial_i u_i\|_{L^2(\Omega}$. Et pour tout $1 \leq i \leq N$ on a $\|\partial_i u_i\|_{L^2(\Omega} \leq \|\boldsymbol{\nabla} u_i\|_{L^2(\Omega)^N}$. Or on sait également que $\|\boldsymbol{\nabla} u_i\|_{L^2(\Omega)^N} \leq \|u_i\|_{H^1(\Omega)}$ par définition de la norme sur H^1. D'où :

$$\|\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)} \leq \sum_{i=1}^N \|u_i\|_{H^1(\Omega)}.$$

En utilisant l'équivalence de la norme 1 et de la norme 2 sur $\mathbb{R}^N$, on obtient l'existence de $A > 0$, indépendante de $\mathbf{u}$, telle que :

$$\|\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)} \leq A\|\mathbf{u}\|_{H^1(\Omega)^N}.$$

□

Corollaire 2.1. *Soit Ω un domaine d'extension borné de $\mathbb{R}^N$. La restriction de l'opérateur divergence à $H^1_0(\Omega)^N$ est continue au sens de la norme H^1_0. On notera $\boldsymbol{\nabla}_0\cdot$ cette restriction.*

Preuve. Ceci découle directement du lemme 2.1 et de l'inégalité de Poincaré démontrée dans [9] avec les mêmes hypothèses sur le domaine Ω.

□

On pose $\theta : \left| \begin{array}{ccc} H^1_0(\Omega)^N & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \mathbf{u} & \longmapsto & \int_\Omega \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{u}\,d\lambda \end{array} \right.$

Lemme 2.2. *L'application θ est linéaire et continue.*

Preuve. θ est la composée de la forme linéaire intégrale sur $L^2(\Omega)$, et de l'opérateur $\boldsymbol{\nabla}_0\cdot$. Par le corollaire 2.1, on sait que $\boldsymbol{\nabla}_0\cdot$ est continu, et par Cauchy-Schwarz, on sait aussi que l'intégrale est une forme linéaire continue sur $L^2(\Omega)$, donc on a le résultat par composition. □

Théorème 2.1. *Soit Ω un domaine d'extension borné de $\mathbb{R}^N$. L'image de $H^1_0(\Omega)^N$ par $\boldsymbol{\nabla}_0\cdot$ est égale à $L^2_0(\Omega)$.*

Preuve. On sait déjà que l'image de $\boldsymbol{\nabla}_0\cdot$ est incluse dans $L^2(\Omega)$ (corollaire 2.1).
Soit $\mathbf{u} \in H^1_0(\Omega)^N$; d'après le théorème 1.4, on sait que $\int_\Omega \boldsymbol{\nabla}_0 \cdot \mathbf{u}\,d\lambda = \langle \Phi, Tr(\mathbf{u})\rangle$. Or, vu $\mathbf{u} \in H^1_0(\Omega)^N$, on a $Tr(\mathbf{u}) = \mathbf{0}$, donc $\langle \Phi, Tr(\mathbf{u})\rangle = 0$, d'où $Im(\boldsymbol{\nabla}_0\cdot) \subset L^2_0(\Omega)$.

Pour l'inclusion réciproque, soit $f \in L^2_0(\Omega)$; par le corollaire 1.1, on sait qu'il existe (f_n) une suite de $\mathcal{D}(\Omega) \cap L^2_0(\Omega)$ qui converge vers f.
D'après [11], puisque Ω est connexe, on sait qu'il existe pour tout n une fonction $\mathbf{u}_n \in \mathcal{D}(\Omega)^N$ telle que $\boldsymbol{\nabla}_0 \cdot \mathbf{u}_n = f_n$.
De plus, il est précisé dans [9] que $\mathbf{u}_n$ dépend continûment de f_n ; on en déduit donc que $(\mathbf{u}_n)$ est une suite bornée de $H^1_0(\Omega)^N$.
D'après le théorème de Kakutani, puisque $H^1_0(\Omega)^N$ est un espace de Hilbert, on sait qu'on peut extraire une suite de $(\mathbf{u}_n)$ qui converge faiblement vers $\mathbf{u} \in H^1_0(\Omega)^N$.

Puisque $\boldsymbol{\nabla}_0\cdot$ est un opérateur fortement continu (corollaire 2.1), on sait qu'il est également continu pour la topologie faible sur $H_0^1(\Omega)^N$, d'où $\boldsymbol{\nabla}_0 \cdot \mathbf{u} = f$. On en déduit $L_0^2(\Omega) \subset Im(\boldsymbol{\nabla}_0\cdot)$. □

2.2 Opérateur gradient

Définition 2.2. *Soit Ω un domaine d'extension borné de $\mathbb{R}^N$. On définit l'opérateur gradient $-\boldsymbol{\nabla}$: $L^2(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)^N$ comme l'adjoint de l'opérateur divergence restreint à $H_0^1(\Omega)^N$.*

Lemme 2.3. *Soit Ω un domaine d'extension borné de $\mathbb{R}^N$. L'opérateur $-\boldsymbol{\nabla} : L^2(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)^N$ est continu.*

Preuve. La continuité de $\boldsymbol{\nabla}_0\cdot$ (corollaire 2.1) suffit pour assurer l'existence et la continuité de son adjoint d'après [3], p. 87. □

Lemme 2.4. *Soit Ω un domaine d'extension borné de $\mathbb{R}^N$. Alors $Ker(\boldsymbol{\nabla}) = Vect(x \mapsto 1)$.*

Preuve. Si $p \in L^2(\Omega)$ est constante, alors on a pour toute $\mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^N$ l'égalité suivante :

$$\begin{aligned}\int_\Omega p\boldsymbol{\nabla}_0 \cdot \mathbf{v} d\lambda &= p\int_\Omega \boldsymbol{\nabla}_0 \cdot \mathbf{v} d\lambda \\ &= 0.\end{aligned}$$

D'après le lemme 2.3, d'où $Vect(x \mapsto 1) \subset Ker(\boldsymbol{\nabla})$. Pour l'inclusion réciproque, soit $p \in Ker(\boldsymbol{\nabla})$; on a donc pour toute $\mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^N$:

$$\int_\Omega p\boldsymbol{\nabla}_0 \cdot \mathbf{v} d\lambda = 0.$$

Et cette égalité est vrai en particulier pour toute $\mathbf{v} \in \mathcal{D}(\Omega)^N$. Si on prend $f \in \mathcal{D}(\Omega)$, et qu'on pose $\mathbf{v} \in \mathcal{D}(\Omega)^N$ dont toutes les coordonnées sont nulles, sauf la i-ème, qui est égale à f, on obtient :

$$\int_\Omega p\partial_i f d\lambda = 0.$$

Ceci étant vrai pour toute $f \in \mathcal{D}(\Omega)$, on obtient que $\partial_i p$ (comprise en tant que distribution) est nulle. Puisque Ω est supposé connexe, le corollaire 5.4.3 de [7] assure alors que p est constante, d'où $Ker(\boldsymbol{\nabla}) \subset Vect(x \mapsto 1)$.

□

2.3 Opérateur laplacien

Définition 2.3. *Soit Ω un domaine d'extension borné de $\mathbb{R}^N$. On définit l'opérateur $\boldsymbol{\Delta} : H^1(\Omega)^N \to H^{-1}(\Omega)^N$ en s'inspirant de la formule (3) du théorème 1.3. Étant donné $\mathbf{u} \in H^1(\Omega)^N$, on a :*

$$\langle \boldsymbol{\Delta}\mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle_{H^{-1}(\Omega)^N, H_0^1(\Omega)^N} := -\int_\Omega (J_\mathbf{u} \mid J_\mathbf{v}) d\lambda, \forall\ \mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^N.$$

Lemme 2.5. *Soit Ω un domaine d'extension borné de $\mathbb{R}^N$. L'opérateur $\boldsymbol{\Delta}$ de la définition 2.3 est bien défini et continu.*

Preuve. Soit $\mathbf{u} \in H^1(\Omega)^N$. Montrons que $\|\boldsymbol{\Delta}\mathbf{u}\|_{H^{-1}} \leq C\|\mathbf{u}\|_{H^1}$.

Soit $\mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^N$. On a :

$$|\langle \boldsymbol{\Delta}\mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle| \leq \int_\Omega |(J_\mathbf{u} \mid J_\mathbf{v})| d\lambda.$$

Or on peut majorer le produit scalaire :

$$|(J_{\mathbf{u}} \mid J_{\mathbf{v}})| \leq \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} |\frac{\partial u_i}{\partial x_j}| \cdot |\frac{\partial v_i}{\partial x_j}|$$

Ainsi on obtient par linéarité de l'intégrale :

$$|\langle \mathbf{\Delta u}, \mathbf{v} \rangle| \leq \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \int_{\Omega} |\frac{\partial u_i}{\partial x_j}| \cdot |\frac{\partial v_i}{\partial x_j}| d\lambda$$

En appliquant l'inégalité de Cauchy Schwarz dans $L^2(\Omega)$ on obtient :

$$|\langle \mathbf{\Delta u}, \mathbf{v} \rangle| \leq \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \|\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\|_{L^2(\Omega)} \cdot \|\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\|_{L^2(\Omega)}$$

En appliquant de nouveau Cauchy Schwarz mais désormais dans R^{N^2} on obtient alors :

$$|\langle \mathbf{\Delta u}, \mathbf{v} \rangle| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \|\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\|^2_{L^2(\Omega)}} \sqrt{\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \|\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\|^2_{L^2(\Omega)}} \leq \|\nabla \mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)^N} \|\mathbf{v}\|_{H_0^1(\Omega)^N}$$

Ainsi $\|\mathbf{\Delta u}\|_{H^{-1}(\Omega)} \leq \|\nabla \mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)^N} \leq \|\mathbf{u}\|_{H^1(\Omega)}$ donc l'opérateur $\mathbf{\Delta}$ est continu. □

2.4 Écriture finale du problème

Définition 2.4 (Problème de Stokes)**.** *Soit Ω un domaine d'extension borné de $\mathbb{R}^N$. Maintenant que tous les opérateurs sont proprement définis on peut écrire sous sa forme définitive le problème de Stokes sur Ω :*

$$\begin{cases} -\mathbf{\Delta u} + \mathbf{\nabla} p = \mathbf{f}, & \mathbf{f} \in H^{-1}(\Omega)^N, \\ \mathbf{\nabla} \cdot \mathbf{u} = 0, & \\ Tr(\mathbf{u}) = \mathbf{g}, \quad \langle \Phi, \mathbf{g} \rangle = 0. & \end{cases} \tag{$\mathcal{P}$}$$

où les opérateurs gradient, divergence et laplacien sont compris au sens des définitions de la section 2.

3 Espaces utiles à la formulation variationnelle

Pour étudier l'existence de solutions au problème ($\mathcal{P}$), il faut dans un premier temps se concentrer sur les espaces dans lesquels on cherchera les solutions. C'est ce qui est fait dans cette section.

3.1 Résultats préliminaires

Lemme 3.1. *Soit Ω un domaine d'extension borné de $\mathbb{R}^N$. Le plongement I^* de $L^2(\Omega)$ dans $H^{-1}(\Omega)$ est compact.*

Preuve. D'après [7], l'injection I de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ est compacte, donc par équivalence des normes H^1 et H_0^1 sur $H_0^1(\Omega)$, sa restriction à $H_0^1(\Omega)$ est également compacte.

Par définition, le plongement de $L^2(\Omega)$ dans $H^{-1}(\Omega)$ est l'adjoint de $I\big|_{H_0^1(\Omega)}$.
D'après [9], puisque $I\big|_{H_0^1(\Omega)}$ est compacte, son adjoint I^* l'est aussi. □

3.2 Fonctions de divergence nulle

Définition 3.1. *Soit Ω un domaine d'extension borné de $\mathbb{R}^N$. On pose $V = \{\mathbf{u} \in H_0^1(\Omega)^N, \boldsymbol{\nabla}_0 \cdot \mathbf{u} = 0\} = Ker(\boldsymbol{\nabla}_0 \cdot)$.*

Lemme 3.2. *Soit Ω un domaine d'extension borné de $\mathbb{R}^N$. On a $V \oplus V^\perp = H_0^1(\Omega)^N$.*

Preuve. D'après le corollaire 2.1, l'opérateur $\boldsymbol{\nabla}_0 : H_0^1(\Omega)^N \to L^2(\Omega)$ est continu, donc son noyau V est fermé dans $H_0^1(\Omega)^N$. Puisque $H_0^1(\Omega)^N$ est un espace de Hilbert on sait que V et son orthogonal sont supplémentaires. □

Théorème 3.1. *Soit Ω un domaine d'extension borné de $\mathbb{R}^N$. Si $f \in H^{-1}(\Omega)^N$ est telle que $\langle f, \mathbf{v}\rangle = 0$ pour toute $\mathbf{v} \in V$, alors il existe $p \in L^2(\Omega)$ telle que $f = -\boldsymbol{\nabla} p$. p est unique à une constante additive près.*

Preuve. On sait par le théorème 2.1 que l'image de $\boldsymbol{\nabla}_0 \cdot$ est fermée dans $L^2(\Omega)$. D'après le corollaire 2.5 de [1], on sait qu'on a alors la relation suivante : $Im(-\boldsymbol{\nabla}) = V^0$, où V^0 est l'ensemble polaire de V, c'est à dire $V^0 := \{y \in H^{-1}(\Omega)^N \mid \langle y, \mathbf{u}\rangle = 0 \ \forall \mathbf{u} \in V\}$.
C'est précisément ce que stipule le théorème. L'unicité à une constante près découle du fait que le noyau du gradient est l'ensemble des fonctions constantes (lemme 2.4). □

Corollaire 3.1. *Soit Ω un domaine d'extension borné de $\mathbb{R}^N$. On a les 2 propriétés suivantes :*

1. *L'opérateur $-\boldsymbol{\nabla}$ réalise un isomorphisme de $L_0^2(\Omega)$ sur V^0.*
2. *L'opérateur $\boldsymbol{\nabla}_0 \cdot$ réalise un isomorphisme de $V^\perp$ sur $L_0^2(\Omega)$.*

Preuve.

1. Par restriction, on sait que $-\boldsymbol{\nabla} \in \mathcal{L}(L_0^2(\Omega), V^0)$. Le théorème 3.1 assure la surjectivité, et la restriction à $L_0^2(\Omega)$ permet d'obtenir l'injectivité (la seule fonction constante dans $L_0^2(\Omega)$ est la fonction nulle). Puisque $L_0^2(\Omega)$ et V^0 sont deux espaces de Banach, $-\boldsymbol{\nabla}$ est un isomorphisme.
2. Puisque $\boldsymbol{\nabla}_0 \cdot$ est l'adjoint de $-\boldsymbol{\nabla}$, on sait que $\boldsymbol{\nabla}_0 \cdot$ réalise un isomorphisme de $(V^0)'$ sur $(L_0^2(\Omega))'$, et par le théorème de Riesz, $(L_0^2(\Omega))'$ est isométrique à $L_0^2(\Omega)$. Il suffit donc de montrer que $(V^0)'$ s'identifie à $V^\perp$; puisque ces deux espaces sont des espaces de Hilbert, on sait qu'ils sont réflexifs, donc cela revient à montrer que V^0 s'identifie à $(V^\perp)'$. Pour cela, étant donné $g \in (V^\perp)'$, on définit $\tilde{g} \in H^{-1}(\Omega)^N$ par, pour tout $u \in H_0^1(\Omega)^N$, $\langle \tilde{g}, u\rangle := \langle g, u^\perp\rangle$ où $u^\perp$ est la projection orthogonale de u sur $V^\perp$. Alors $g \mapsto \tilde{g}$ est une isométrie de $(V^\perp)'$ sur V^0.

□

Théorème 3.2. *Soit Ω un domaine d'extension borné de $\mathbb{R}^N$. Soit $\mathbf{g} \in B(\Gamma)$ telle que $\langle \Phi, \mathbf{g}\rangle = 0$, où Φ est la forme linéaire définie au corollaire 1.2. Alors il existe une solution dans $H^1(\Omega)^N$, unique à une fonction de V près, du problème suivant :*

$$\begin{cases} \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{u} = 0. \\ Tr(\mathbf{u}) = \mathbf{g}. \end{cases}$$

De plus il existe $C > 0$ telle qu'on ait :

$$\inf_{\mathbf{y} \in V} \|\mathbf{y} + \mathbf{u}\|_{H^1(\Omega)^N} \leq C \|\mathbf{g}\|_{B(\Gamma)}. \tag{6}$$

Preuve. Soit $\mathbf{w} \in H^1(\Omega)^N$, telle que $Tr(\mathbf{w}) = g$. Alors par le corollaire 1.2, on a $\int_\Omega \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{w} d\lambda = \langle \Phi, \mathbf{g}\rangle$. Par hypothèse $\langle \Phi, \mathbf{g}\rangle = 0$, donc $\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{w} \in L_0^2(\Omega)$. D'après le corollaire 3.1, on sait alors qu'il existe une unique $\mathbf{v} \in V^\perp$ telle que $\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{v} = \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{w}$. Alors $\mathbf{u} := \mathbf{w} - \mathbf{v}$ est la solution recherchée, puisque vu $\mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^N$, on a $Tr(\mathbf{v}) = 0$.
On s'assure maintenant que $\mathbf{u}$ vérifie la borne ; d'après le corollaire 3.1, on sait que $\mathbf{v}$ dépend continûment de $\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{w}$. Puisque l'opérateur divergence est continu, on peut trouver une constante $C > 0$ telle que : $\|\mathbf{u}\|_{H^1(\Omega)^N} \leq C \|\mathbf{w}\|_{H^1(\Omega)^N}$. Cette inégalité étant vraie pour toute $\mathbf{w}$ qui vérifie

$Tr(\mathbf{w}) = \mathbf{g}$, on a $\|\mathbf{u}\|_{H^1(\Omega)^N} \leq C \inf_{Tr(\mathbf{w})=g} \|\mathbf{w}\|_{H^1(\Omega)^N}$. On reconnaît dans le membre de droite de l'inégalité la définition de $\|\mathbf{g}\|_{B(\Gamma)^N}$, et vu $\inf_{\mathbf{y}\in V} \|\mathbf{y}+\mathbf{u}\|_{H^1(\Omega)^N} \leq \|\mathbf{u}\|_{H^1(\Omega)^N}$, on en déduit le résultat :

$$\inf_{\mathbf{y}\in V} \|\mathbf{y}+\mathbf{u}\|_{H^1(\Omega)^N} \leq C\|\mathbf{g}\|_{B(\Gamma)^N}.$$

□

4 Existence et unicité

Dans toute cette section, on notera $\langle\cdot,\cdot\rangle$ le crochet de dualité de $H^{-1}(\Omega)^N$ sur $H_0^1(\Omega)^N$. On notera $\mathbf{u}_0$ la fonction dont le théorème 3.2 assure l'exsitence, et $\mathbf{f}$ le terme de force volumique qui apparaît dans le problème $(\mathcal{P})$.

4.1 Résultats préliminaires

Définition 4.1. *Soit Ω un domaine d'extension borné de $\mathbb{R}^N$. On définit :*

1. *La forme bilinéaire*
$$\begin{array}{rccl} a: & H_0^1(\Omega)^N \times H_0^1(\Omega)^N & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (\mathbf{u},\mathbf{v}) & \longmapsto & \displaystyle\int_\Omega (J_\mathbf{u} \mid J_\mathbf{v})\, d\lambda. \end{array}$$
2. *La forme bilinéaire*
$$\begin{array}{rccl} b: & L_0^2(\Omega) \times H_0^1(\Omega)^N & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (p,\mathbf{v}) & \longmapsto & \displaystyle\int_\Omega p\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{v}\, d\lambda. \end{array}$$
3. *La forme linéaire*
$$\begin{array}{rccl} l: & H_0^1(\Omega)^N & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & \mathbf{v} & \longmapsto & \langle f,\mathbf{v}\rangle - a(\mathbf{u_0},\mathbf{v}). \end{array}$$

Lemme 4.1. *Soit Ω un domaine d'extension borné de $\mathbb{R}^N$. Les 3 opérateurs de la définition 4.1 sont continus.*

Preuve. 1. La continuité de a est assurée par la preuve du Lemme 2.5. avec l'inégalité

$$|\langle\boldsymbol{\Delta}\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle| \leq \|\nabla\mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)^N}\|\mathbf{v}\|_{H_0^1(\Omega)^N}.$$

2. La continuité de b est assurée par la continuité de la divergence ainsi que la continuité du produit scalaire dans $L^2(\Omega)$.

3. La continuité de l est assurée par la continuité de f ainsi que celle de a à u_0 fixé.

□

Lemme 4.2. *Soit Ω un domaine d'extension borné de $\mathbb{R}^N$. Il existe deux réels strictements positifs, α et β tels qu'on ait :*

1. $a(\mathbf{v},\mathbf{v}) \geq \alpha\|\mathbf{v}\|^2_{H_0^1(\Omega)^N}, \quad \forall\mathbf{v}\in V$
2. $\sup_{\mathbf{v}\in H_0^1(\Omega)^N} \frac{b(q,\mathbf{v})}{\|\mathbf{v}\|_{H_0^1(\Omega)^N}} \geq \beta\|q\|_{L_2(\Omega)}, \quad \forall q\in L_0^2(\Omega)$

Preuve. 1. Le point 1 est immédiat sachant que pour tout $\mathbf{v}\in H_0^1(\Omega)^N$, $a(\mathbf{v},\mathbf{v}) = \|\mathbf{v}\|_{H_0^1(\Omega)^N}$.

2. Concernant le point 2 : Soit $q\in L_0^2(\Omega)$. D'après le corollaire 3.1 il existe $v\in V^\perp$ tel que :

$$\boldsymbol{\nabla}_\mathbf{0}.\mathbf{v} = q$$

Et le corollaire 3.1 donne également l'inégalité suivante :

$$\|\mathbf{v}\|_{H_0^1(\Omega)^N} \leq C \times \|q\|_{L_2(\Omega)}.$$

Finalement comme v est dans $H_0^1(\Omega)^N$:

$$\frac{(q, \boldsymbol{\nabla}.\mathbf{v})}{\|\mathbf{v}\|_{H_0^1(\Omega)^N}} = \frac{\|q\|^2_{L^2(\Omega)}}{\|\mathbf{v}\|_{H_0^1(\Omega)^N}} \geq (1/C)\|q\|_{L^2(\Omega)}.$$

On en déduit alors l'inégalité de la deuxième ligne de (11).

□

4.2 Formulation variationnelle

Lemme 4.3. *Soit Ω un domaine d'extension borné de $\mathbb{R}^N$. Le problème $(\mathcal{P})$ se réduit au problème équivalent $(\mathcal{P}')$, avec conditions au bord homogènes :*

$$\begin{cases} -\boldsymbol{\Delta}\tilde{\mathbf{u}} + \boldsymbol{\nabla} p = \tilde{\mathbf{f}}, \quad \tilde{\mathbf{f}} \in H^{-1}(\Omega)^N, \\ \boldsymbol{\nabla} \cdot \tilde{\mathbf{u}} = 0, \\ Tr(\tilde{\mathbf{u}}) = 0 \end{cases} \tag{$\mathcal{P}'$}$$

Preuve. On considère $\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{u} - \mathbf{u}_0$ et $\tilde{\mathbf{f}} = \mathbf{f} + \boldsymbol{\Delta}\mathbf{u}_0$ et on a le résultat, en utilisant le fait que (théorème 3.2) :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{u}_0 = 0. \\ Tr(\mathbf{u}_0) = \mathbf{g}. \end{cases}$$

□

Lemme 4.4. *Soit Ω un domaine d'extension borné de $\mathbb{R}^N$. Le problème $(\mathcal{P}')$ se met sous forme variationnelle selon l'écriture suivante :*

$$\begin{cases} a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \ b(p, \mathbf{v}) = l(\mathbf{v}) \ , \quad \forall \mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^N \\ b(\mathbf{u}, q) = 0 \ , \quad \forall q \in L_0^2(\Omega) \end{cases} \tag{FV}$$

Preuve. Pour la première ligne c'est immédiat vu la manière dont sont définis les opérateurs gradient et laplacien, il suffit d'évaluer en $\mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^N$. Pour la deuxième on multiplie par $q \in L_0^2(\Omega)$ et on intègre. □

Théorème 4.1 (Résultat final)**.** *Soit Ω un domaine d'extension borné de $\mathbb{R}^N$. Il existe une unique solution $(\mathbf{u}, p) \in H^1(\Omega)^N \times L_0^2(\Omega)$ au problème $(\mathcal{P})$.*

Preuve. D'après les résultats du paragraphe 4 du chapitre 1 de [4], le lemme 4.2 permet d'assurer l'existence d'une unique solution $(\tilde{\mathbf{u}}, p) \in H_0^1(\Omega)^N \times L_0^2(\Omega)$ au problème (FV). En particulier, vu les définitions de a et de b, la première ligne de (FV) équivaut à l'égalité suivante dans $H^{-1}(\Omega)^N$:

$$-\boldsymbol{\Delta}\tilde{\mathbf{u}} + \boldsymbol{\nabla} p = \tilde{\mathbf{f}}. \tag{7}$$

Et la deuxième ligne de (FV) s'interprète comme $\boldsymbol{\nabla} \cdot \tilde{\mathbf{u}} \in L_0^2(\Omega)^{\perp}$. Sachant que par le théorème 2.1 on a aussi $\boldsymbol{\nabla} \cdot \tilde{\mathbf{u}} \in L_0^2(\Omega)$, cela implique que :

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \tilde{\mathbf{u}} = 0. \tag{8}$$

On a donc par (7) et (8) une unique solution au problème $(\mathcal{P}')$, équivalent au problème $(\mathcal{P})$. □

References

[1] Haïm Brézis. *Analyse Fonctionnelle: Théorie et Applications.* Masson, 1983.

[2] A.-P. Calderon. Lebesgue spaces of differentiable functions and distributions. In *Proc. Symp. Pure Math.*, volume 4, pages 33–49. American Mathematical Society, 1961.

[3] Gabriel Claret, Michael Hinz, Anna Rozanova-Pierrat, and Alexander Teplyaev. Layer potential operators for transmission problems on extension domains. *hal-04505158*, 2023.

[4] Vivette Girault and Pierre-Arnaud Raviart. *Finite Element Methods for Navier-Stokes Equations: Theory and Algorithms.* Springer-Verlag, 1986.

[5] Piotr Haj łasz, Pekka Koskela, and Heli Tuominen. Sobolev embeddings, extensions and measure density condition. *J. Funct. Anal.*, 254(5):1217–1234, 2008.

[6] Michael Hinz, Anna Rozanova-Pierrat, and Alexander Teplyaev. Non-lipschitz uniform domain shape optimization in linear acoustics. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 59(2):1007–1032, 2021.

[7] Michael Hinz, Anna Rozanova-Pierrat, and Alexander Teplyaev. Boundary value problems on non-lipschitz uniform domains: stability, compactness and the existence of optimal shapes. 2022.

[8] L. D. Landau and E. M. Lifshitz. *Fluid Mechanics.* Pergamon Press, Oxford, 2nd edition, 1987.

[9] Anna Rozanova-Pierrat. *Analyse Fonctionnelle.* 2019. Cours de 3A.

[10] E. M. Stein. *Singular integrals and differentiability properties of functions.* Princeton University Press, Princeton, NJ, 1970.

[11] Xiaoming Wang. A remark on the characterization of the gradient of a distribution. *Applicable Analysis*, 51:35–40, 1993.