Projet Fluide S7

Brahim Benali, Martin Graffin, Axel Knecht,
Maxime Nicaise, Tarik Ouadjou, Marc-Antoine Wilk

November 14, 2025

Table des matières

1 Introduction

L'année dernière, le groupe s'était concentré sur l'obtention d'un résultat d'existence et unicité d'une solution $(\mathbf{u}, p) \in H^1(\Omega)^N \times L^2_0(\Omega)$ pour Ω un H^1-domaine d'extension :

$$\begin{cases} -\boldsymbol{\Delta}\mathbf{u} + \boldsymbol{\nabla} p = \mathbf{f} \\ \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{u} = 0. \end{cases} \tag{1}$$

Ce résultat ayant été établi au terme des 6 premiers mois de projet, nous nous sommes concentrés cette année sur la généralisation de résultats déjà existants dans le cadre des domaines réguliers, autour du thème des opérateurs de trace tangentielle. La définition de ce type d'opérateur intervient dans les formulations variationnelles associées aux problèmes de Navier-Stokes, mais aussi aux équations de Maxwell. Une des difficultés principales concerne le fait qu'on ne travaille plus sur l'espace $H^1(\Omega)$, mais sur des espaces fonctionnels beaucoup plus grands et moins connus, $H(div, \Omega)$ et $H(\boldsymbol{curl}, \Omega)$.
L'essentiel des thèmes abordés durant ce semestre est déjà connu dans le cadre des domaines lipschitziens, et a été traité par exemple dans [5].

2 Résultats préliminaires

Définition 2.1. *On pose* $\mathcal{D}(\overline{\Omega}) := \{u|_\Omega \mid u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)\}$.

Définition 2.2. *Soit* Ω *un ouvert de* $\mathbb{R}^N$. *On pose* $\tilde{H}^1(\Omega) := \overline{H^1(\Omega) \cap \mathcal{D}(\overline{\Omega})}^{H^1(\Omega)}$.

On introduit dans cette partie un objet appelé capacité, qui est en fait une mesure extérieure sur $\mathbb{R}^N$. L'idée derrière cette définition est que certains ensembles critiques dans les problèmes d'analyse fonctionnelle sont "invisibles" pour la mesure de Lebesgue N-dimensionnelle ; typiquement, la frontière du domaine Ω. La capacité permet de donner une taille non nulle à ce type d'ensembles, de façon intrinsèquement liée à la structure de l'espace $H^1(\Omega)$.

Définition 2.3 (Capacité)**.** *Soit* $A \subset \mathbb{R}^N$. *On définit* $Cap(A) := \inf\{\|u\|^2_{H^1(\mathbb{R}^N)} \mid u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ *tel qu'il existe* $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^N$ *ouvert avec* $u \geq 1$ $\lambda - p.p$ *sur* $\mathcal{O}$ *et* $A \subset \mathcal{O}\}$.

On dira qu'une propriéte est vérifiée pour $H^1(\mathbb{R}^N)$-quasi-tout $x \in \mathbb{R}^N$ si elle est vraie en dehors d'un ensemble de capacité nulle.

Lemme 2.1. *Soient* A *et* B *deux sous ensembles de* $\mathbb{R}^N$ *tels que* $A \subset B$. *Alors* $Cap(A) \leq Cap(B)$.

Proof. Voir [2], 1.8 (Cap est une mesure extérieure). □

Lemme 2.2. *Soit* A *un borélien de* $\mathbb{R}^N$. *Alors* $\lambda(A) \leq Cap(A)$.

Proof. Voir 1.8 de [2]. □

Lemme 2.3. *Soit* Ω *un domaine d'extension borné. Alors* $\tilde{H}^1(\Omega) = H^1(\Omega)$.

Proof. Voir définition 1.2 de [1]. □

Lemme 2.4. *Soit* $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$. *On définit :*

$$\tilde{u}(x) := \lim_{r \to 0} \frac{1}{\lambda(B(x,r))} \int_{B(x,r)} u(y)\, \lambda(dy). \tag{2}$$

Alors la limite définie par (2) existe pour $H^1(\mathbb{R}^N)$*-quasi-tout* $x \in \mathbb{R}^N$. *De plus,* $\tilde{u}$ *est* $H^1(\mathbb{R}^N)$*-quasi-continue et égale à* u λ*-presque-partout.*

Ce lemme permet donc d'obtenir pour tout $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ l'existence d'un représentant de u qui soit quasi-continu. L'intérêt de ce résultat est qu'il permet d'obtenir une caractérisation des éléments de $H^1_0(\Omega)$.

Proof. Le fait que l'on se place sur $H^1(\mathbb{R}^N)$ avec $N = 2$ ou $N = 3$ permet d'obtenir l'inégalité suivante : $1 \leq \frac{N}{2}$. D'après la partie 2 de [7], cette hypothèse permet d'obtenir le résultat. □

Théorème 2.1. *Soit* Ω *un domaine de* $\mathbb{R}^N$. *On a :*

$$H^1_0(\Omega) = \{u \in H^1(\mathbb{R}^N) \mid \tilde{u}(x) = 0 \text{ pour quasi} - \text{tout } x \in \mathbb{R}^N \setminus \Omega\}.$$

Proof. Voir la proposition 2.4 de [1]. □

Le théorème suivant contient toute la difficulté de la généralisation de la preuve du théorème 3.1, qui sera démontré dans la partie 3.

Théorème 2.2. *Soit* Ω *un domaine d'extension borné de* $\mathbb{R}^N$, *de frontière* Γ, *et* $u \in H^1(\Omega)$. *On note* $\mathcal{Z}u$ *l'extension par 0 de* u *en dehors de* Ω. *Si* $\mathcal{Z}u \in H^1(\mathbb{R}^N)$, *alors* $u \in H^1_0(\Omega)$.

Preuve. Soit $x \in \mathbb{R}^N \setminus \overline{\Omega}$. Alors pour r suffisamment petit on a $B(x,r) \cap \Omega = \emptyset$, donc $\mathcal{Z}u$ est nulle sur $B(x,r)$. On en déduit que $\tilde{\mathcal{Z}u}(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^N \setminus \overline{\Omega}$.

Supposons qu'il existe $A \subset \mathbb{R}^N \setminus \Omega$ de capacité strictement positive tel que $\tilde{\mathcal{Z}u}$ soit non nulle sur tout A. On a vu que $\tilde{\mathcal{Z}u}$ est nulle sur $\mathbb{R}^N \setminus \overline{\Omega}$, donc on a nécessairement $A \subset \Gamma$. Puisque $\tilde{\mathcal{Z}u}$ est $H^1(\mathbb{R}^N)$-quasi-continue, il existe G ouvert de $\mathbb{R}^N$ tel que $Cap(G) < \frac{Cap(A)}{2}$ et $\tilde{\mathcal{Z}u}$ soit continue sur $\mathbb{R}^N \setminus G$. D'après le lemme 2.1, on en déduit qu'il existe $x \in A$ tel que $x \notin G$. On a $x \in \Gamma$ donc $x \in \overline{\mathbb{R}^N \setminus \overline{\Omega}}$. Donc il existe une suite $(x_n) \subset (\mathbb{R}^N \setminus \overline{\Omega})$ qui converge vers x. D'autre part, G est ouvert, et $x \notin G$, donc à partir d'un certain rang n_0 les termes de (x_n) sont dans $(\mathbb{R}^N \setminus \overline{\Omega}) \cap (\mathbb{R}^N \setminus G)$. Or on a pour tout $n \geq n_0$ l'égalité $\tilde{\mathcal{Z}u}(x_n) = 0$ puisque $x_n \in \mathbb{R}^N \setminus \overline{\Omega}$, donc $\tilde{\mathcal{Z}u}(x_n) \to 0$. Mais cela contredit la caractérisation séquentielle de la continuité de $\tilde{\mathcal{Z}u}$ sur $(\mathbb{R}^N \setminus G)$, puisque par hypothèse on avait $x \in A$ donc $\tilde{\mathcal{Z}u}(x) \neq 0$.

On sait donc que $\tilde{\mathcal{Z}u}$ est nulle $H^1(\mathbb{R}^N)$-quasiment-partout sur $\mathbb{R}^N \setminus \Omega$. D'après le théorème 2.1, ceci implique que $(\mathcal{Z}u)|_\Omega = u \in H^1_0(\Omega)$. □

Le lemme technique suivant a été utilisé dans l'une des approches pour tenter de conclure quant à la densité des fonctions C^∞ jusqu'au bord du domaine, en partie 4.

Lemme 2.5. *Soit Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^3$, et Θ un sous domaine de Ω. On pose $H := \{\mathcal{Z}\boldsymbol{u} \mid \boldsymbol{u} \in H_0(\boldsymbol{curl}, \Theta)\}$. Alors :*

(i) L'espace H est un sous espace de $H(\boldsymbol{curl}, \Omega)$.

(ii) Pour toute $\boldsymbol{f} \in H$, on a $\boldsymbol{curl}(\boldsymbol{f}) = \mathcal{Z}\boldsymbol{curl}(\boldsymbol{u})$, où $\boldsymbol{u}$ est une fonction dans $H_0(\boldsymbol{curl}, \Theta)$ telle que $\boldsymbol{f} = \mathcal{Z}\boldsymbol{u}$.

(iii) L'espace H est inclus dans $H_0(\boldsymbol{curl}, \Omega)$.

(iv) L'espace H est fermé.

Preuve. (i) Soit $\boldsymbol{u} \in H_0(\boldsymbol{curl}, \Theta)$. Il est clair que $Z\boldsymbol{u}$ est dans $L^2(\Omega)^3$. On montre maintenant que la distribution $\boldsymbol{curl}(\mathcal{Z}\boldsymbol{u})$ se représente également comme un élément de $L^2(\Omega)^3$. Soit $\boldsymbol{\phi} \in \mathcal{D}(\Omega)^3$. Par définition :

$$\langle \boldsymbol{curl}(\mathcal{Z}\boldsymbol{u}), \boldsymbol{\phi} \rangle = \int_\Omega \mathcal{Z}\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{curl}(\boldsymbol{\phi})\, dx$$
$$\langle \boldsymbol{curl}(\mathcal{Z}\boldsymbol{u}), \boldsymbol{\phi} \rangle = \int_\Theta \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{curl}(\boldsymbol{\phi})\, dx$$
$$\langle \boldsymbol{curl}(\mathcal{Z}\boldsymbol{u}), \boldsymbol{\phi} \rangle = \int_\Theta \boldsymbol{curl}(\boldsymbol{u}) \cdot \boldsymbol{\phi}\, dx$$
$$\langle \boldsymbol{curl}(\mathcal{Z}\boldsymbol{u}), \boldsymbol{\phi} \rangle = \int_\Omega \mathcal{Z}\boldsymbol{curl}(\boldsymbol{u}) \cdot \boldsymbol{\phi}\, dx. \tag{3}$$

Donc on a bien $\boldsymbol{curl}(\mathcal{Z}\boldsymbol{u}) = \mathcal{Z}\boldsymbol{curl}(\boldsymbol{u}) \in L^2(\Omega)^3$. On en déduit $H \subset H(\boldsymbol{curl}, \Omega)$, et puisque $\mathcal{Z}$ est linéaire, on en déduit que H est bien un sous espace de $H(\boldsymbol{curl}, \Omega)$.

(ii) Cela se déduit directement de la ligne (3) de la preuve de (i).

(iii) Soit $\boldsymbol{f} \in H_0(\mathrm{curl}, \Theta)$. Il existe donc une suite $(\boldsymbol{f}_n) \subset \mathcal{D}(\Theta)^3$ qui converge vers $\boldsymbol{f}$ en norme $H(\boldsymbol{curl}, \Theta)$. Soit $n \in \mathbb{N}$; Puisque $\boldsymbol{f}_n$ est une fonction de classe C^∞ à support compact dans Θ, $\mathcal{Z}\boldsymbol{f}_n$ est clairement dans $\mathcal{D}(\Omega)$. De plus, puisque les intégrales sont nulles en dehors de Θ, on a $\|\mathcal{Z}\boldsymbol{f} - \mathcal{Z}\boldsymbol{f}_n\|_{H(\boldsymbol{curl},\Omega)} = \|\boldsymbol{f} - \boldsymbol{f}_n\|_{H(\boldsymbol{curl},\Theta)} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ par hypothèse. Donc $\mathcal{Z}\boldsymbol{f} \in H_0(\boldsymbol{curl}, \Omega)$.

(iv) L'opérateur $\mathcal{Z} : H_0(\boldsymbol{curl}, \Theta) \to H(\boldsymbol{curl}, \Omega)$ est linéaire. D'autre part, grâce au point (ii), on voit que pour toute $\boldsymbol{f} \in H_0(\boldsymbol{curl}, \Theta)$, on a $\|\boldsymbol{f}\|_{H(\boldsymbol{curl},\Theta)} = \|\mathcal{Z}\boldsymbol{f}\|_{H(\boldsymbol{curl},\Omega)}$, donc $\mathcal{Z}$ est une isométrie ; en particulier $\mathcal{Z}$ est continue et injective, et on a

$$\|\mathcal{Z}\boldsymbol{f}\|_{H(\boldsymbol{curl},\Omega)} \geq \|\boldsymbol{f}\|_{H(\boldsymbol{curl},\Theta)},\ \forall\ \boldsymbol{f} \in H_0(\boldsymbol{curl},\Theta).$$

D'après le chapitre 2 de [8], cela permet d'assurer que l'image de $\mathcal{Z}$, c'est à dire H, est un fermé de $H(\boldsymbol{curl},\Omega)$.

□

Définition 2.4. *Soit Ω un sous-ensemble de $\mathbb{R}^N$. On dit que Ω est strictement étoilé par rapport à $x_0 \in \Omega$ si pour tout $\theta \in (0,1)$, $\theta(\Omega - x_0) \subset (\Omega - x_0)$.*

Théorème 2.3. *On a $H(\mathrm{curl},\mathbb{R}^3) = H_0(\mathrm{curl},\mathbb{R}^3)$.*

Preuve. Soit $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ telle que :

$$\phi(x) = \begin{cases} 1 \text{ for } \|x\| \leq 1 \\ 0 \text{ for } \|x\| \geq 2 \end{cases}$$

Et on définit $\phi_a(x) = \phi(\frac{x}{a})$. On a alors, pour toute $\boldsymbol{f} \in H(\mathrm{curl},\mathbb{R}^3)$, $\phi_a \boldsymbol{f} \xrightarrow{a\to\infty} f$ dans $H(\mathrm{curl},\mathbb{R}^3)$. En régularisant $\phi_a \boldsymbol{f}$, on obtient que $\boldsymbol{f}$ est limite d'une suite de fonctions de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^3)^3$ dans $H(\mathrm{curl},\mathbb{R}^3)$, d'où le résultat. □

C'est dans ce théorème 2.3 que réside toute la difficulté de la généralisation des résultats de [5] sur l'espace $H(\boldsymbol{curl},\Omega)$. Plusieurs approches sont proposées pour le démontrer, mais aucune n'aboutit. Cependant, il est clair que le résultat n'est pas loin. La conclusion de cette démonstration sera l'un des objectifs principaux du groupe au second semestre.

Théorème 2.4 (Conjecture)**.** *Soit Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^3$, de frontière Γ, et $\boldsymbol{f} \in H(\boldsymbol{curl};\Omega)$. On suppose que pour toute $\boldsymbol{\phi} \in \mathcal{D}(\bar{\Omega})^3$, on a :*

$$\int_\Omega \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{curl}(\boldsymbol{\phi})\, dx - \int_\Omega \boldsymbol{curl}(\boldsymbol{f}) \cdot \boldsymbol{\phi}\, dx = 0.$$

Alors $\boldsymbol{f} \in H_0(\boldsymbol{curl};\Omega)$.

Preuve. □

Approche 1. On définit l'opérateur bilinéaire B :

$$B : \left| \begin{array}{ccc} H(\boldsymbol{curl},\Omega) \times \mathcal{D}(\bar{\Omega})^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (\boldsymbol{f},\boldsymbol{\phi}) & \longmapsto & \int_\Omega \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{curl}(\boldsymbol{\phi})\, dx - \int_\Omega \boldsymbol{curl}(\boldsymbol{f}) \cdot \boldsymbol{\phi}\, dx \end{array} \right.$$

Soit $\boldsymbol{f}$ qui vérifie $B(\boldsymbol{f},\boldsymbol{\phi}) = 0$ pour toute $\boldsymbol{\phi} \in \mathcal{D}(\bar{\Omega})^3$. Soit (Ω_n) une suite de sous domaines lischitziens de Ω, qui converge vers Ω au sens des compact (voir définition 2.2.21 de [6]). On définit pour tout n l'espace $H_n := \{\mathcal{Z}\boldsymbol{u} \mid \boldsymbol{u} \in H_0(\boldsymbol{curl},\Omega_n)\}$, où $\mathcal{Z}\boldsymbol{u}$ est l'extension par zéro sur $\boldsymbol{u}$ sur Ω. D'après le lemme 2.5, on sait que H_n est un sous espace fermé de $H_0(\boldsymbol{curl},\Omega)$. On note π_n la projection orthogonale sur H_n, et on définit $\boldsymbol{f}_n = \pi_n(\boldsymbol{f})$. On a donc $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{f}_n + \boldsymbol{r}_n$ avec $\boldsymbol{r}_n = \boldsymbol{f} - \boldsymbol{f}_n \in H_n^\perp$. On note $\{\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\}$ le produit scalaire de $H(\boldsymbol{curl},\Omega)$. Soit $\boldsymbol{\psi} \in \mathcal{D}(\Omega)^3$. Puisque (Ω_n) converge vers Ω au sens des compacts, on sait qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que le support de $\boldsymbol{\psi}$ soit contenu strictement dans Ω_n pour tout $n \geq n_0$. On a alors, pour tout $n \geq n_0$, $\boldsymbol{\psi} \in H_n$, donc $\{\boldsymbol{r}_n,\boldsymbol{\psi}\} = 0$, car $\boldsymbol{r}_n \in H_n^\perp$.

On a pour tout n, $\|\boldsymbol{f}_n\|_{H(\boldsymbol{curl},\Omega)} \leq \|\boldsymbol{f}\|_{H(\boldsymbol{curl},\Omega)}$. Puisque $H(\boldsymbol{curl},\Omega)$ est un espace de Hilbert, on en déduit qu'il existe une sous suite $(\boldsymbol{f}_{n_k})$ qui converge faiblement vers $\boldsymbol{g}$. Puisque $\boldsymbol{r}_n = \boldsymbol{f} - \boldsymbol{f}_n$, on a aussi $\boldsymbol{r}_{n_k} \rightharpoonup \boldsymbol{r} = \boldsymbol{f} - \boldsymbol{g}$. Soit $\boldsymbol{\psi} \in \mathcal{D}(\Omega)^3$; on a vu qu'à partir d'un certain rang on a $\{\boldsymbol{r}_n,\boldsymbol{\psi}\} = 0$. Donc en passant à la limite faible on obtient $\{\boldsymbol{r},\boldsymbol{\psi}\} = 0$: ceci étant vrai pour tout $\boldsymbol{\psi} \in \mathcal{D}(\Omega)^3$, on obtient

$$\boldsymbol{r} \in H_0(\boldsymbol{curl},\Omega)^\perp. \tag{4}$$

Soit $\boldsymbol{\phi} \in \mathcal{D}(\Omega)^3$:
$$B(\boldsymbol{f}, \boldsymbol{\phi}) = 0 \Longleftrightarrow B(\boldsymbol{f}_n, \boldsymbol{\phi}) + B(\boldsymbol{r}_n, \boldsymbol{\phi}) = 0.$$
Or $B(\boldsymbol{f}_n, \boldsymbol{\phi}) = \int_{\Omega_n} \boldsymbol{f}_n \cdot \boldsymbol{curl}(\boldsymbol{\phi})\, dx - \int_{\Omega_n} \boldsymbol{curl}(\boldsymbol{f}_n) \cdot \boldsymbol{\phi}\, dx$. Puisque $\boldsymbol{f}_n \in H_n$, on sait que $\boldsymbol{f}_n\big|_{\Omega_n} \in H_0(\boldsymbol{curl}, \Omega_n)$. Or Ω_n est lipschitzien donc d'après les résultats de [5], on en déduit que $B(\boldsymbol{f}_n, \boldsymbol{\phi}) = 0$. Il reste donc que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall \boldsymbol{\phi} \in \mathcal{D}(\bar{\Omega})^3,\ B(\boldsymbol{r}_n, \boldsymbol{\phi}) = 0. \tag{5}$$
En passant à la limite (B est continue pour la norme donc aussi pour la topologie faible)on obtient aussi $\forall \boldsymbol{\phi} \in \mathcal{D}(\bar{\Omega})^3,\ B(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{\phi}) = 0$. On peut donc prolonger $\boldsymbol{r}$ par 0 à un domaine lipschitzien Π contenant Ω , et on aura $\mathcal{Z}\boldsymbol{r} \in H(\boldsymbol{curl}, \Pi)$.

□

Approche 2. Soit (Ω_n) une suite d'ouverts lipschitziens qui approche Ω par l'extérieur (voir [4]). $\forall n \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{Z}_n \boldsymbol{f}$ l'extension par 0 de $\boldsymbol{f}$ à Ω_n. Soit $n \in \mathbb{N}$: l'hypothèse du théorème permet de justifier que $\mathcal{Z}_n \boldsymbol{f} \in H(\boldsymbol{curl}, \Omega_n)$ (voir [5]). Puisque Ω_n est lipschitzien, on sait d'après les résultats existants que $\mathcal{Z}_n \boldsymbol{f} \in H_0(\boldsymbol{curl}, \Omega_n)$. On sait donc qu'il existe une suite $(\boldsymbol{\phi}_k^{(n)})_{k \in \mathbb{N}}$ de fonctions dans $\mathcal{D}(\Omega_n)^3$ qui converge vers $\mathcal{Z}_n \boldsymbol{f}$ dans $H(\boldsymbol{curl}, \Omega_n)$.

On aurait également besoin d'une suite exhaustive de compacts $(K_j)_j$ de Ω, et d'une suite de fonctions plateau $(\eta_j)_j$ associée à $(K_j)_j$; $\eta_j = 1$ sur K_j et et $\eta_j = 0$ sur $\Omega \setminus K_{j+1}$. On poserait maintenant pour tout $n, k \in \mathbb{N}$, $\boldsymbol{\psi}_n = \eta_n \boldsymbol{\phi}_n^{(n)}\big|_{\Omega}$. On a $\boldsymbol{\phi}_n^{(n)} \in \mathcal{D}(\Omega_n)$ et le support de η_n est $K_{n+1} \subset \Omega$ donc $\boldsymbol{\psi}_n \in \mathcal{D}(\Omega)$. On montrerait enfin que $\boldsymbol{\psi}_n$ converge vers $\boldsymbol{f}$ dans $H(\boldsymbol{curl}, \Omega)$.

Cependant, avec cette approche, $\boldsymbol{curl}(\eta\boldsymbol{\psi})$ risque de ne pas être intégrable à cause de la divergence de $\boldsymbol{\nabla}\eta$ et de la formule : $\boldsymbol{curl}(\eta\boldsymbol{\psi}) = \boldsymbol{\nabla}\eta \times \boldsymbol{\psi} + \eta\boldsymbol{curl}(\boldsymbol{\psi})$. □

3 Densité de $\mathcal{D}(\overline{\Omega})^N$ dans $H(div; \Omega)$

Ici on démontre la densité des fonctions de classe C^∞ jusqu'au bord du domaine dans $H(div, \Omega)$. Une fois cette étape passée, on pourra définir l'opérateur de trace normale sur tout l'espace $H(div, \Omega)$ en prolongeant par continuité.

Définition 3.1. *Pour Ω un domaine de $\mathbb{R}^N$, on pose : $H(div; \Omega) = \{v \in L^2(\Omega)^N,\ div(v) \in L^2(\Omega)\}$. Cet espace est un espace de Hilbert pour la norme suivante : $\|v\|^2_{H(div,\Omega)} = \|v\|^2_{L^2(\Omega)^N} + \|div(v)\|^2_{L^2(\Omega)}$.*

On rappelle que pour $v \in L^2(\Omega)^N$, la distribution $div(v)$ est définie par :
$$\forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega),\ \langle div(v), \phi\rangle = -\int_\Omega v \cdot grad(\phi)\, dx.$$

Lemme 3.1. *Soit X un espace de Banach et $A \subset X$.*
A est dense dans $X \Longleftrightarrow$ Tout élément de X' qui s'annule sur A s'annule sur X.

Preuve. Le sens direct découle de la continuité des éléments de X'.
On procède par contraposition pour le sens réciproque.
Si A n'est pas dense dans X, alors il existe $x_0 \in X$ et $\epsilon > 0$ tels que $\forall a \in A, \|x_0 - a\| > \epsilon$.
On pose alors :
$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin B_{\epsilon/2}(x_0) \\ \epsilon/2 - \|x - x_0\| & \text{si } x \in B_{\epsilon/2}(x_0) \end{cases}$$
f est bien définie de X dans $\mathbb{R}$, nulle sur A, non nulle sur X et clairement continue.

□

Théorème 3.1. *Soit Ω un domaine d'extension borné de $\mathbb{R}^N$. $\mathcal{D}(\bar{\Omega})^N$ est dense dans $H(div, \Omega)$*

Preuve. Soit $f \in H(div,\Omega)'$. D'après [1], $H(div,\Omega)$ est un espace de Hilbert. On peut donc appliquer le théorème de Riesz et fixer $l \in H(div,\Omega)$ tel que:

$$\forall u \in H(div,\Omega), \langle f,u\rangle = \sum_{i=1}^{N} \langle l_i, u_i\rangle_{L^2(\Omega)} + \langle l_{N+1}, div(u)\rangle_{L^2(\Omega)}$$

avec $l_{N+1} = div(l)$. Supposons que f s'annule sur $\mathcal{D}(\bar{\Omega})^N$ et notons $\mathcal{Z}l_i$ l'extension par zéro de l_i sur $\mathbb{R}^N$. On en déduit :

$$\forall \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)^N, \langle \mathcal{Z}l, \phi\rangle_{H(div,\mathbb{R}^N)} = \int_{\mathbb{R}^N} (\mathcal{Z}l \cdot \phi + \mathcal{Z}l_{N+1} div\phi)dx = 0.$$

Cette dernière équation équivaut à dire que dans $(\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)^N)'$, on a $\mathcal{Z}l = grad(\mathcal{Z}l_{N+1})$. D'après le lemme de du Bois-Reymond, on en déduit que $\mathcal{Z}l = grad(\mathcal{Z}l_{N+1})$ dans $L^2(\mathbb{R}^N)^N$. Donc $\mathcal{Z}l_{N+1} \in H^1(\mathbb{R}^N)$: d'après le théorème 2.2, on en déduit que $l_{N+1} \in H^1_0(\Omega)$. On peut donc trouver une suite $(\psi_\mu) \subset \mathcal{D}(\Omega)$ qui converge vers l_{N+1} dans $H^1(\Omega)$. Par continuité de l'opérateur $grad$ sur $H^1_0(\Omega)$, on sait que la suite $(grad(\psi_\mu))$ converge vers $grad(l_{N+1}) = l$ dans $H^1(\Omega)$. Soit $u \in H(div;\Omega)$; par définition de la distribution $div(u)$, on a :

$$\forall \mu \in \mathbb{N}, \int_\Omega grad(\psi_\mu) u \, dx + \int_\Omega \psi_\mu div(u)\, dx = 0.$$

On passe à la limite par continuité du produit scalaire L^2 dans $H^1(\Omega)$, et on obtient $\langle f,u\rangle_{H(div;\Omega)} = 0$. On en déduit que f est nulle sur $H(div;\Omega)$ entier, et donc que $\mathcal{D}(\overline{\Omega})^N$ est dense dans cet espace par le lemme 3.1. □

4 Densité de $\mathcal{D}(\overline{\Omega})^N$ dans $H(curl;\Omega)$

Ici on propose plusieurs approches poiur tenter d'aboutir à la densité des fonctions de classe C^∞ jusqu'au bord du domaine dans $H(\boldsymbol{curl},\Omega)$. L'idée est qu'une fois cette étape passée, on pourra définir l'opérateur de trace tangentielle sur tout l'espace $H(\boldsymbol{curl},\Omega)$ en prolongeant par continuité.

Définition 4.1. *Pour $N = 2$ ou 3, curl se définit ainsi :*

Pour $\phi \in L^2(\Omega)$, $curl(\phi) = [(x,y) \to (\frac{\partial\phi}{\partial y}, -\frac{\partial\phi}{\partial x})]$

Pour $\phi \in L^2(\Omega)^2$, $curl(\phi) = [(x,y) \to \frac{\partial\phi_2}{\partial x} - \frac{\partial\phi_1}{\partial y}]$

Pour $\phi \in L^2(\Omega)^3$, $curl(\phi) = [(x,y,z) \to (\frac{\partial\phi_3}{\partial y} - \frac{\partial\phi_2}{\partial z}, \frac{\partial\phi_1}{\partial z} - \frac{\partial\phi_3}{\partial x}, \frac{\partial\phi_2}{\partial x} - \frac{\partial\phi_1}{\partial y})]$

Définition 4.2. *Ici, $N = 3$, et on adapte si $N = 2$.*
Pour Ω un domaine de $\mathbb{R}^N$, on pose : $H(curl;\Omega) = \{v \in L^2(\Omega)^N,\ curl(v) \in L^2(\Omega)^N\}$. Cet espace est un espace de Hilbert pour la norme suivante : $\|v\|^2_{H(curl,\Omega)} = \|v\|^2_{L^2(\Omega)^N} + \|curl(v)\|^2_{L^2(\Omega)}$.

Lemme 4.1. **??** *Soit Ω un domaine borné. Alors l'ensemble des fonctions de $H(\mathrm{curl},\Omega)$ à support compact est dense dans $H(\mathrm{curl},\Omega)$.*

Proof. Voir lemme 2.3 page 33 de [5]. □

Lemme 4.2. *Soit Ω un domaine d'extension borné de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. L'opérateur curl est linéaire continu sur $H(curl,\Omega)$.*

Proof. La linéarité est immédiate.
Par ailleurs :

$\forall \phi \in H(curl,\Omega), \|curl(\phi)\|_{L^2(\Omega)} \leq \|\phi\|_{L^2(\Omega)} + \|curl(\phi)\|_{L^2(\Omega)} = \|\phi\|_{H(curl,\Omega)}$. □

Théorème 4.1 (Conjecture)**.** *Soit Ω un domaine d'extension borné de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$ est dense dans $H(curl,\Omega)$.*

Tentative de preuve. On fixe $f \in H(\mathrm{curl},\Omega)'$ et $l \in H(\mathrm{curl},\Omega)$ tels que:

$$\forall u \in H(\mathrm{curl},\Omega), \quad \langle f,u\rangle = \langle l,u\rangle_{H(\mathrm{curl},\Omega)} = \sum_{i=1}^{N} \langle l_i,u_i\rangle_{L^2(\Omega)} + \langle l_{N+1},\mathrm{curl}(u)\rangle_{L^2(\Omega)^N},$$

avec $l_{N+1} = \mathrm{curl}(l)$.

Supposons que f s'annule sur $\mathcal{D}(\bar{\Omega})^N$ et notons $\tilde{l}_i$ l'extension par zéro de l_i sur $\mathbb{R}^N$.

$$\forall \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)^N, \quad \langle \tilde{l},\phi\rangle_{H(\mathrm{curl},\mathbb{R}^N)} = \langle \tilde{l},\phi\rangle_{L^2(\Omega)^N} + \langle \tilde{l}_{N+1},\mathrm{curl}(\phi)\rangle_{L^2(\Omega)^N}.$$

En réorganisant :

$$\langle \tilde{l},\phi\rangle_{H(\mathrm{curl},\mathbb{R}^N)} = \langle \tilde{l},\phi\rangle + \langle \mathrm{curl}(\tilde{l}_{N+1}),\phi\rangle = 0.$$

D'après le lemme de du Bois-Reymond, on a $\tilde{l} = -\mathrm{curl}(\tilde{l}_{N+1})$.

Comme $\tilde{l} \in L^2(\mathbb{R}^N)$, il s'ensuit que $\tilde{l}_{N+1} \in H(\mathrm{curl},\mathbb{R}^N)$, puis $l_{N+1} \in H(\mathrm{curl},\Omega)$.

Pour le produit scalaire dans $L^2(\mathbb{R}^N)$, nous avons :

$$\forall \phi \in \mathcal{D}(\bar{\Omega}), \quad \langle f,\phi\rangle = \langle l_{N+1},\mathrm{curl}(\phi)\rangle - \langle \mathrm{curl}(l_{N+1}),\phi\rangle = 0.$$

D'après le théorème 2.3, on en déduit que $l_{N+1} \in H_0(\mathrm{curl},\Omega)$. Il existe donc une suite $(\psi_p) \in \mathcal{D}(\Omega)^{\mathbb{N}} \subset \mathcal{D}(\bar{\Omega})^{\mathbb{N}}$ qui converge vers l_{N+1}.

Par continuité de curl et passage à la limite :

$$\forall u \in H(\mathrm{curl},\Omega), \quad \langle f,u\rangle = \langle l_{N+1},\mathrm{curl}(u)\rangle - \langle \mathrm{curl}(l_{N+1}),u\rangle = 0.$$

On conclut avec le lemme 3.1. □

5 Opérateurs tangentiels

Théorème 5.1. *L'application $\gamma_\tau : \mathbf{v} \mapsto \mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\tau}|\Gamma$ pour $N = 2$, ou $\gamma_\tau : \mathbf{v} \mapsto \mathbf{v}\times\mathbf{n}|\Gamma$ pour $N = 3$, définie sur $\mathcal{D}(\overline{\Omega})^N$, peut être étendue par continuité en une application linéaire et continue, toujours notée γ_τ, de $H(curl;\Omega)$ dans $B'(\Gamma)$ si $N = 2$, ou $B'(\Gamma)^3$ si $N = 3$.*

De plus pour $\mathbf{v} \in H(curl;\Omega)$, la formule de Green suivante est vérifiée :

$$\begin{cases} \forall \boldsymbol{\varphi} \in H^1(\Omega)^3, (curl\ \mathbf{v},\boldsymbol{\varphi}) - (\mathbf{v}, curl\ \boldsymbol{\varphi}) = \langle \gamma_\tau \mathbf{v}, Tr(\boldsymbol{\varphi})\rangle_\Gamma \ si\ N = 3 \\ \forall \boldsymbol{\varphi} \in H^1(\Omega), (curl\ \mathbf{v},\boldsymbol{\varphi}) - (\mathbf{v}, curl\ \boldsymbol{\varphi}) = \langle \gamma_\tau \mathbf{v}, Tr(\boldsymbol{\varphi})\rangle_\Gamma \ si\ N = 2 \end{cases}$$

Preuve. On se place dans le cas N = 2. Nous définissons la forme linéaire suivante : $\forall \mathbf{v} \in \mathcal{D}(\overline{\Omega})^N$

$$L_v : B(\Gamma) \to \mathbb{R}$$

$$w \mapsto (\mathrm{curl}\ \mathbf{v}, \boldsymbol{E_\Gamma(w)}) - (\mathbf{v}, \mathrm{curl}\ \boldsymbol{E_\Gamma(w)})$$

où $E_\Gamma : B(\Gamma) \to H^1(\Omega)$ est la version en 3D de l'opérateur d'extension (extension par composantes).

On note $\phi = E_\Gamma(w) \in H^1(\Omega)$. Alors, $\mathrm{Tr}(\phi)$ existe et on a $\mathrm{Tr}(\phi) = w$.

On pose alors,

$$\langle \gamma_\tau \mathbf{v}, \boldsymbol{Tr(\phi)}\rangle_\Gamma = L_v(\mathrm{Tr}(\phi)) \quad \forall v \in \mathcal{D}(\overline{\Omega})^N$$

Ainsi, comme l'opérateur d'extension est continu, et avec l'inégalité

$$\|v\|^2_{H(\mathrm{curl},\Omega)} \leq 2\|v\|^2_{H^1(\Omega)},$$

On en déduit que L_v est continue, ce qui assure que : $\gamma_\tau \mathbf{v} \in B'(\Gamma)$

Montrons maintenant que $\gamma_\tau : \mathbf{v} \mapsto \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\tau}|_\Gamma$ est continue sur $\mathcal{D}(\overline{\Omega})^N$:

$$\langle \gamma_\tau \mathbf{v}, \boldsymbol{Tr(\phi)} \rangle_\Gamma \leq \|\mathbf{v}\|_{H(\mathrm{curl};\Omega)} \|\phi\|_{H^1(\Omega)} \quad \forall \phi \in H^1(\Omega),\, \forall \mathbf{v} \in \mathcal{D}(\overline{\Omega})^N.$$

On en déduit :

$$\|\gamma_\tau \mathbf{v}\|_{B'(\Gamma)} \leq \|\mathbf{v}\|_{H(\mathrm{curl};\Omega)}.$$

Ce qui implique la continuité de l'opérateur de trace tangentielle sur $\mathcal{D}(\overline{\Omega})^N$. Puis, par densité de $\mathcal{D}(\overline{\Omega})^N$ (si nous avons réussi à le montrer) dans $H(\mathrm{curl};\Omega)$, on peut étendre continûment cet opérateur de trace tangentielle.

□

Théorème 5.2. *L'opérateur $\frac{\partial u}{\partial \tau}$ défini comme étant*

$$< \frac{\partial u}{\partial \tau}, v >_{H'(\boldsymbol{curl};\Omega),H(\boldsymbol{curl};\Omega)} = \int_\Omega \mathbf{rot}(\mathbf{v}).\nabla u$$

pour $u \in \mathbf{H}^1(\Omega)$ existe et est continu.

Proof.

$$|\int_\Omega \mathbf{rot}(\mathbf{v}).\nabla u| \leq \sqrt{\int_\Omega \|\nabla \mathbf{u}\|_\mathbf{2}} \times \sqrt{\int_\Omega \|\mathbf{rot}(\mathbf{v})\|_\mathbf{2}} \leq C\|v\|^2_{H(curl,\Omega)}$$

avec C $= \sqrt{\int_\Omega \|\nabla \mathbf{u}\|_\mathbf{2}}$

Ainsi $\frac{\partial u}{\partial \tau} \in H'(\boldsymbol{curl};\Omega)$ □

6 Conclusion

Au terme de ce semestre, beaucoup de travail reste encore à faire pour obtenir une théorie complète des opérateurs de trace normale et tangentielle sur des domaines potentiellement non lipschitziens. La progression du groupe a notamment été retardée par les grandes difficultés rencontrées lors de la démonstration du théorème 2.4. La conclusion de la preuve de ce résultat sera d'ailleurs l'un des objectifs principaux du groupe au semestre prochain.
L'objectif à terme est d'obtenir une généralisation des résultats présentés par P. Ciarlet dans [3], pour des domaines à bord possiblement non lipschitzien.

References

[1] Wolfgang Arendt and Mahamadi Warma. The laplacian with robin boundary conditions on arbitrary domains. *Potential Analysis*, 19(4):341–363, 2003.

[2] Nicolas Bouleau and Francis Hirsch. *Dirichlet Forms and Analysis on Wiener Space*. De Gruyter, Berlin, New York, 1991.

[3] Patrick Ciarlet. *Classroom notes for AMS308 course*. Patrick Ciarlet, 828, boulevard des Maréchaux, 91762 Palaiseau Cedex, 2022.

[4] Gabriel Claret, Anna Rozanova-Pierrat, and Alexander Teplyaev. Convergence of layer potentials and riemann-hilbert problem on extension domains. *J.Eur.Math.Soc.*, 2020.

[5] Vivette Girault and Pierre-Arnaud Raviart. *Finite Element Methods for Navier-Stokes Equations: Theory and Algorithms*. Springer-Verlag, 1986.

[6] Antoine Henrot and Michel Pierre. *Shape variation and optimization, a geometrical analysis*, volume 28 of *EMS Tracts in Mathematics*. European Mathematical Society, Zürich, Switzerland, 2018.

[7] Michael Hinz, Anna Rozanova-Pierrat, and Alexander Teplyaev. Boundary value problems on non-lipschitz uniform domains: stability, compactness and the existence of optimal shapes. 2022.

[8] Yehuda Shalom and Paul S. Muhly. *An Invitation to Operator Theory*, volume 50 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2002.