

Soutenance finale FLUIDE

Martin Graffin Axel Knecht Maxime Nicaise

Centralesupélec

June 11, 2025

Sommaire

- 1 Introduction
- 2 Résultats du S6
- 3 Travaux théoriques de cette année
- 4 Travaux numériques de cette année

Contexte (1)

- Problème de Helmholtz :

$$\begin{cases} \Delta u + k^2 u = 0 \\ u = g \text{ on } \partial\Omega. \end{cases}$$

- Problème de Stokes :

$$\begin{cases} -\Delta \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} \\ \operatorname{div}(\mathbf{u}) = 0 \\ \mathbf{u} = \mathbf{g} \text{ on } \partial\Omega. \end{cases}$$

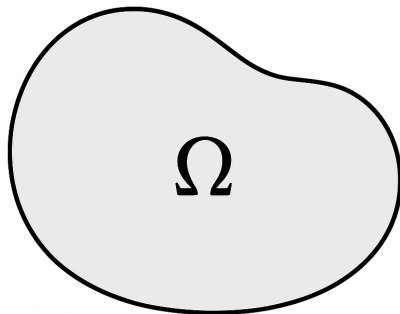


Figure: Exemple de domaine Ω régulier.

Contexte (2)

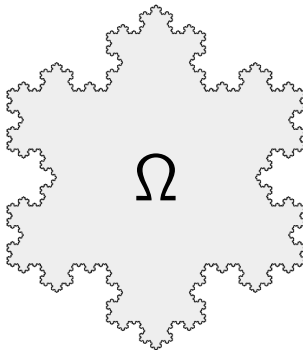


Figure: Exemple de domaine Ω non régulier.

Cadre mathématique (1)

On rappelle que $H^1(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega), \text{grad } u \in \mathbf{L}^2(\Omega)\}$.

Definition

Soit $A \subset \mathbb{R}^N$. On définit

$\text{Cap}(A) := \inf \{ \|u\|_{H^1(\mathbb{R}^N)}^2 \mid u \in H^1(\mathbb{R}^N) \text{ tel qu'il} \\ \text{existe } \mathcal{O} \subset \mathbb{R}^N \text{ ouvert avec } u \geq 1 \text{ p.p sur } \mathcal{O} \text{ et } A \subset \mathcal{O} \}.$

Definition

Un domaine Ω de $\mathbb{R}^N$ est un H^1 -domaine d'extension s'il existe un opérateur borné $E : H^1(\Omega) \rightarrow H^1(\mathbb{R}^N)$ tel que pour tout $u \in H^1(\Omega)$, $Eu|_{\Omega} = u$.

Cadre mathématique (2)

Definition

Un domaine Ω de $\mathbb{R}^N$ est dit H^1 admissible si c'est un domaine d'extension et que son bord a une capacité non nulle.

Théorème

Soit Ω un domaine H^1 admissible de $\mathbb{R}^N$. Il existe un opérateur de trace borné $\text{Tr} : H^1(\Omega) \rightarrow B_1(\partial\Omega)$ qui admet un inverse à droite. Le noyau de cet opérateur est $H_0^1(\Omega)$.

Résultat final de l'année dernière

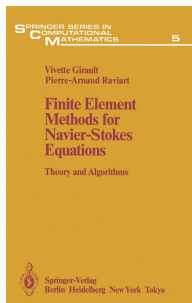
Nous avons travaillé sur le problème de Stokes

$$\begin{cases} -\Delta \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f}, & \mathbf{f} \in H^{-1}(\Omega)^N, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \\ \text{Tr}(\mathbf{u}) = \mathbf{g}, \quad \langle \Phi, \mathbf{g} \rangle = 0. \end{cases} \quad (\mathcal{P})$$

Théorème

Soit Ω un domaine H^1 admissible. Alors le problème $(\mathcal{P})$ admet une unique solution qui dépend continûment des paramètres $\mathbf{f}$ et $\mathbf{g}$.

Travaux de cette année



De nouveaux espaces :

- $\mathbf{H}(\text{curl}, \Omega) = \{\mathbf{w} \in \mathbf{L}^2(\Omega) \mid \text{curl } \mathbf{w} \in \mathbf{L}^2(\Omega)\}.$
- $\mathbf{H}(\text{div}, \Omega) = \{\mathbf{w} \in \mathbf{L}^2(\Omega) \mid \text{div } \mathbf{w} \in L^2(\Omega)\}.$

Figure: Notre référence principale.

Trace sur $\mathbf{H}(\mathbf{curl}, \Omega)$

On reconstruit la théorie existante sur H^1 sur ce nouvel espace. Et on arrive au théorème suivant :

Théorème

Soit Ω un domaine $\mathbf{H}(\mathbf{curl})$ admissible de $\mathbb{R}^3$. Il existe un opérateur de trace borné $\mathbf{Tr}_{\mathbf{curl}} : \mathbf{H}(\mathbf{curl}, \Omega) \rightarrow \mathbf{B}_{\mathbf{curl}}(\partial\Omega)$ qui admet un inverse à droite. Le noyau de cet opérateur est $\mathbf{H}_0(\mathbf{curl}, \Omega)$.

Trace tangentielle

Théorème (Trace tangentielle)

Soit Ω un domaine $\mathbf{H}(\text{curl})$ admissible. Il existe un opérateur de trace tangentielle borné $\mathbf{Tr}_T : \mathbf{H}(\text{curl}, \Omega) \rightarrow \mathbf{B}'_{\text{curl}}(\partial\Omega)$, et l'identité suivante est vérifiée pour tout $\mathbf{u} \in \mathbf{H}(\text{curl}, \Omega)$ et $\mathbf{v} \in \mathbf{H}(\text{curl}, \Omega)$:

$$\langle \mathbf{Tr}_T(\mathbf{u}), \mathbf{Tr}_{\text{curl}}(\mathbf{v}) \rangle_{\mathbf{B}'_{\text{curl}}(\partial\Omega), \mathbf{B}_{\text{curl}}(\partial\Omega)} = \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \text{curl}(\mathbf{v}) \, dx - \int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \text{curl}(\mathbf{u}) \, dx.$$

Le noyau de cet opérateur est $\mathbf{H}_0(\text{curl}, \Omega)$.

Si bord régulier : $\mathbf{Tr}_T(\mathbf{u}) = \mathbf{u} \times \mathbf{n}$.

Partie normale et tangentielle des fonctions dans l'espace de bord

Definition

Soit Ω un domaine $\mathbf{H}(\text{curl})$ admissible. On définit la partie normale de $\mathbf{B}_{\text{curl}}(\partial\Omega)$ de la façon suivante :

$$\mathbf{B}_{\perp}(\partial\Omega) = \{ \mathbf{e} \in \mathbf{B}_{\text{curl}}(\partial\Omega), \forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}(\text{curl}, \Omega), \\ \langle \text{Tr}_T(\mathbf{v}), \mathbf{e} \rangle_{\mathbf{B}'_{\text{curl}}(\partial\Omega), \mathbf{B}_{\text{curl}}(\partial\Omega)} = 0 \}.$$

On a donc la décomposition suivante de l'espace de bord :

$$\mathbf{B}_{\text{curl}}(\partial\Omega) = \mathbf{B}_{\perp}(\partial\Omega) \oplus \mathbf{B}_T(\partial\Omega).$$

Composante tangentielle de la trace

Théorème (Composante tangentielle de la trace)

Soit Ω un domaine $\mathbf{H}(\mathbf{curl})$ admissible. Il existe un opérateur continu appelé la composante tangentielle de la trace

$\pi_T : \mathbf{H}(\mathbf{curl}, \Omega) \rightarrow \mathbf{B}'_{\perp}(\partial\Omega)$ qui vérifie pour $\mathbf{u} \in \mathbf{H}(\mathbf{curl}, \Omega)$:

$$\begin{aligned} & \langle \pi_T(\mathbf{u}), (\mathbf{Tr}_{\mathbf{curl}}(\mathbf{v}))_{\perp} \rangle_{\mathbf{B}'_{\perp}(\partial\Omega), \mathbf{B}_{\perp}(\partial\Omega)} \\ &= \int_{\Omega} \mathbf{curl}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} \, dx - \int_{\Omega} \mathbf{curl}(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{u} \, dx. \end{aligned}$$

le noyau de π_T est $\mathbf{H}_0(\mathbf{curl}, \Omega)$.

Opérateurs différentiels tangentiels

- Le gradient tangentiel :

$$\nabla_T : \left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{B}_1(\partial\Omega) & \longrightarrow \mathbf{B}'_\perp(\partial\Omega) \\ \text{Tr}(u) & \longmapsto \nabla_T(\text{Tr}(u)) := \pi_T(\nabla u). \end{array} \right.$$

- La divergence tangentielle $\text{div}_{\partial\Omega}$ est définie comme l'opérateur adjoint de $-\nabla_T : \forall \phi \in H^1(\Omega), \forall \psi \in \mathbf{B}_1(\partial\Omega) :$

$$\langle -\nabla_T(\text{Tr}(\phi)), \psi \rangle_{\mathbf{B}'_\perp(\partial\Omega), \mathbf{B}_\perp(\partial\Omega)} = \langle \text{div}_{\partial\Omega}(\psi), \text{Tr}(\phi) \rangle_{\mathbf{B}'_1(\partial\Omega), \mathbf{B}_1(\partial\Omega)}.$$

- Le **curl** tangentiel :

$$\text{curl}_{\partial\Omega} : \left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{B}_1(\partial\Omega) & \longrightarrow \mathbf{B}'_T(\partial\Omega) \\ \text{Tr}(u) & \longmapsto \text{curl}_{\partial\Omega}(\text{Tr}(u)) := \text{Tr}_T(\nabla u). \end{array} \right.$$

Décomposition de Hodge

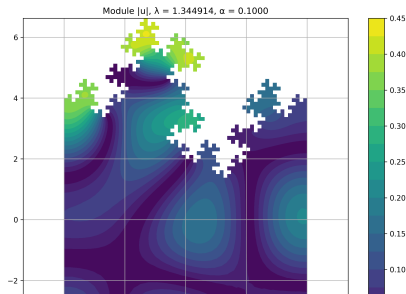
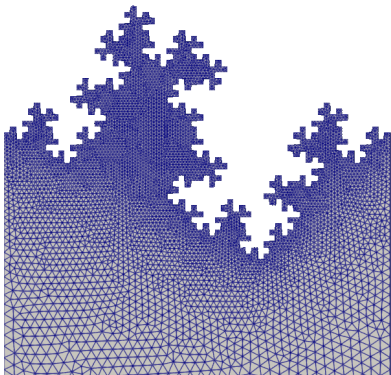
Théorème

Soit Ω un domaine simplement connexe H^1 admissible et $\mathbf{H}(\mathbf{curl})$ admissible. Alors on a la décomposition suivante de $\mathbf{L}^2(\Omega)$:

$$\mathbf{L}^2(\Omega) = \mathbf{curl}(\mathbf{H}_0(\mathbf{curl}, \Omega)) \oplus \mathbf{grad}(H^1(\Omega)).$$

Très utilisé par les physiciens en mécanique des fluides et électromagnétique.

Partie Numérique



Valeurs propres d'un problème de Laplace sur une géométrie fractale

- Recherche des valeurs propres réelles λ vérifiant :

$$-\Delta u = \lambda u \quad \text{dans } \Omega$$

- Conditions au bord de type **Robin** :

$$\frac{\partial u}{\partial n} + \alpha u = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega$$



Influence du coefficient α

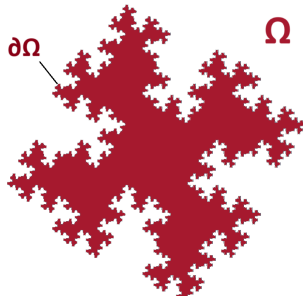
Le coefficient réel α modifie l'influence du bord :

- $\alpha > 0$: pondère la part de la valeur imposée sur le bord et du flux

Limites remarquables :

- $\alpha \rightarrow 0$: condition de Neumann (pas de perte sur le bord).
- $\alpha \rightarrow \infty$: condition de Dirichlet (valeur imposée nulle sur le bord).

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u & \text{dans } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} + \alpha u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$



Discretisation éléments finis

- Formulation faible après intégration par parties :

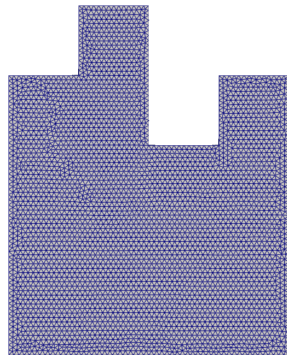
$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \alpha \int_{\partial\Omega} uv \, ds = \lambda \int_{\Omega} uv \, dx$$

- Approximation $u \approx \sum_j u_j \phi_j$, $v \approx \sum_i v_i \phi_i$.

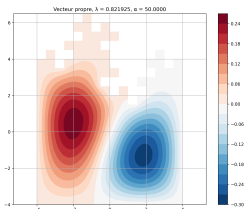
Système matriciel généralisé :

$$(K + R)U = \lambda MU$$

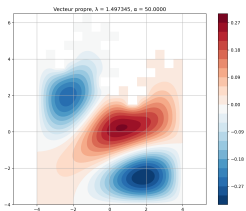
- $K_{ij} = \int_{\Omega} \nabla \phi_i \cdot \nabla \phi_j \, dx$ (raideur)
- $R_{ij} = \alpha \int_{\partial\Omega} \phi_i \phi_j \, ds$ (Robin)
- $M_{ij} = \int_{\Omega} \phi_i \phi_j \, dx$ (masse)



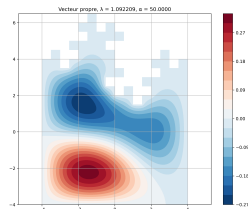
Notion de mode ($\alpha = 50$)



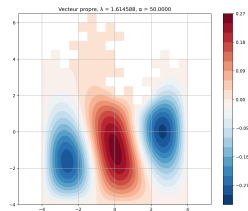
Mode 1



Mode 3

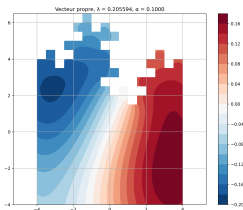


Mode 2

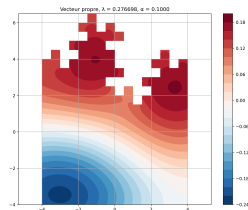


Mode 4

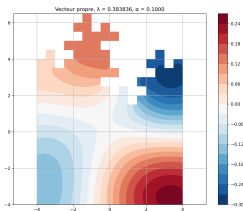
Notion de mode ($\alpha = 0.1$)



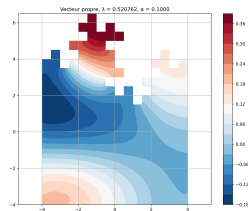
Mode 1



Mode 2

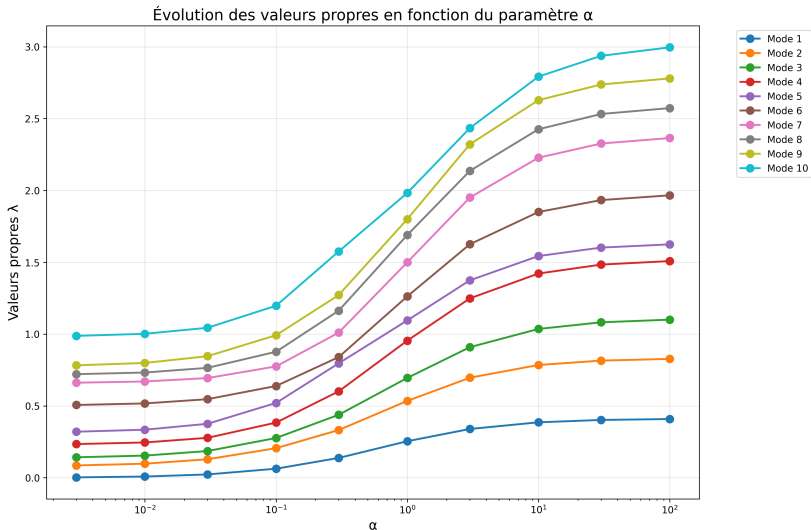


Mode 3

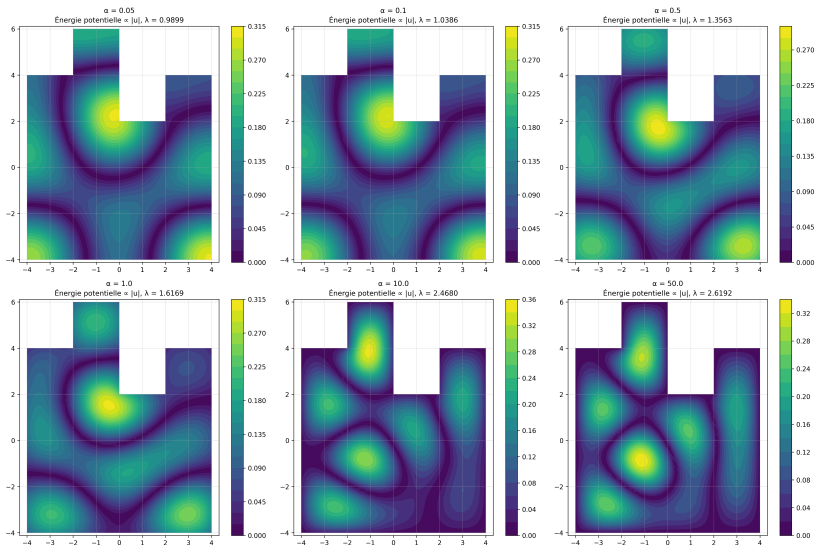


Mode 4

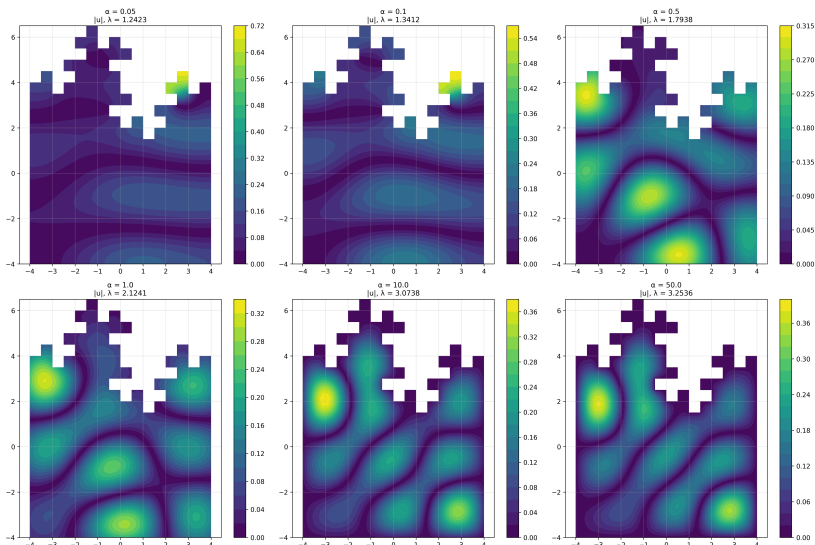
Évolution des modes en fonction de α (fractale degré 2)



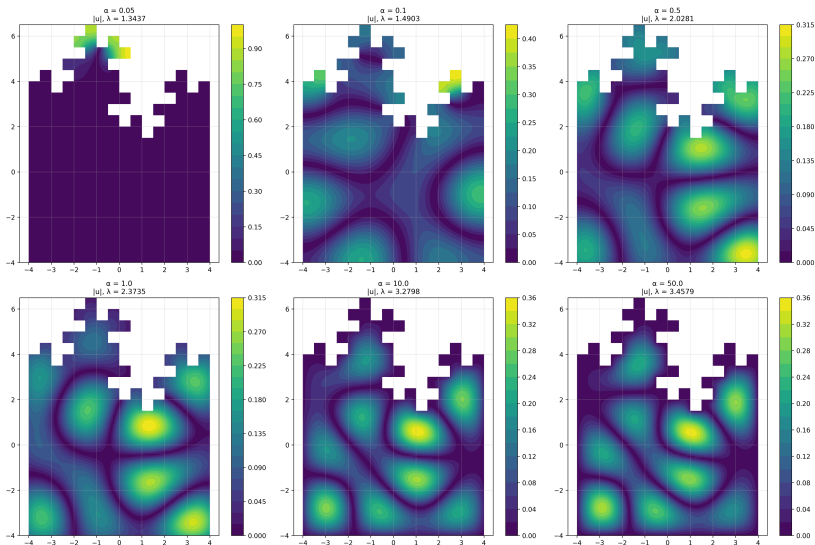
Évolution du mode 9 en fonction de α (fractale degré 1)



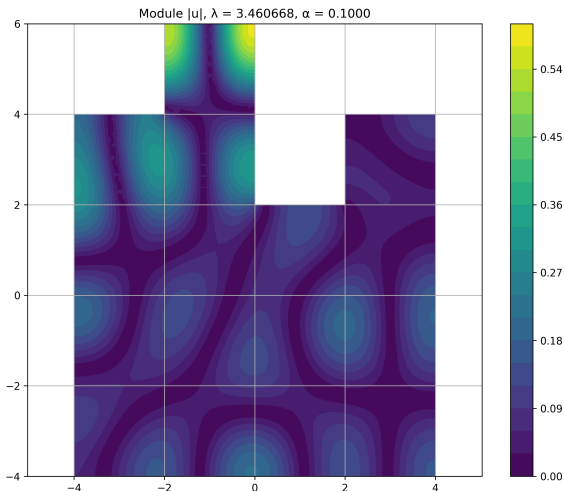
Évolution du mode 11 en fonction de α (fractale degré 2)



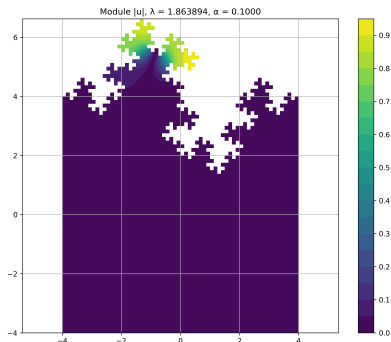
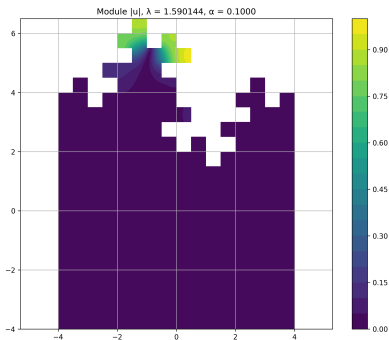
Mode 12 en fonction de α (phénomène de localisation)



Phénomène de localisation pour fractale de degré 1 (mode24)

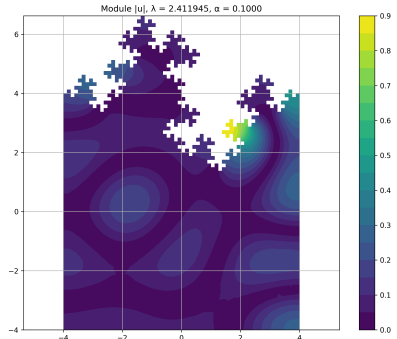
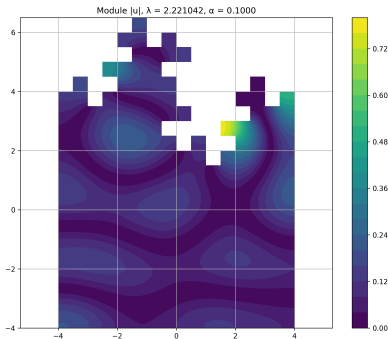


Etude de l'influence du degré de la fractale sur les vecteurs propres



Étude de l'influence du degré de la fractale sur les vecteurs propres

On observe des similarités entre les figures : on peut donc imaginer une convergence de ce vecteur propre lorsque le degré de la fractale tend vers $\infty \dots$



Conclusion partie numérique

- Méthode validée pour des α réels
- Implémentation numérique efficace et stable

Ouvertures :

- Étendre l'analyse aux $\alpha \in \mathbb{C}$
- Explorer d'autres géométries fractales
- Adapter les méthodes de résolution spécifiquement aux fractales auto-similaires

FIN

**Merci pour votre attention
!**